Análisis matemático en preguntas y problemas

Análisis matemático en preguntas y problemas

В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев, А. А. Шишкин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ВОПРОСАХ И ЗАДАЧАХ

Москва «Высшая школа»

Análisis matemático en preguntas y problemas

Dirigido por V.F. Butúzov



Editorial Mir Moscú

Autores:
V. F. Butúzov, N. Ch. Krutítskaya, G. N. Medvédev, A. A. Shishkin

Traducido del ruso por G. Lozhkin

Impreso en la URSS

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

На испанском языке

ISBN 5-03-000663-X

Contenido

Prefacio

La experiencia de muchos años de leer conferencias y dirigir seminarios sobre el análisis matemático, en el I curso de la facultad de física de la Universidad Estatal de Moscú, sirvió de base para escribir el presente manual. Éste está destinado tanto a los estudiantes, como a quienes se dedican a la enseñanza de esta ciencia, sobre todo, a los profesores jóvenes que empiezan a dirigir seminarios.

El manual abarca el material dedicado al análisis matemático de las funciones de una variable, incluyendo los conceptos de medida y de la integral de Lebesgue. Esta obra no es una colección de problemas en sentido corriente. Como se deduce de su estructura, persigue el objetivo de ayudar a los estudiantes a asimilar de manera activa y no formal la disciplina de que se trata. Como regla, en cada párrafo el material está dividido en cuatro puntos.

En el p. I —«Conceptos y teoremas fundamentales»— se exponen las nociones teóricas y fórmulas principales (por supuesto, sin demostración alguna) que son imprescindibles para solucionar los problemas. Las definiciones y los teoremas corresponden, en la mayoría de los casos, a los aducidos en el curso de V. A. Ilyin and E. G. Poznyak «Fundamentals of Matematical Analysis», Mir, Moscú, 1982, que es el manual básico sobre el análisis matemático en la facultad de física de la Universidad Estatal de Moscú. A veces, después de formular la definición o el teorema, se dan varios ejemplos explicativos o algunos comentarios para facilitar a los estudiantes la percepción de los nuevos conceptos. En la medida de lo posible, los autores tratan de dar la interpretación física de los conceptos matemáticos.

En el p. II —«Preguntas y tareas de control»— se incluyen cuestiones sobre la teoría y problemas simples, cuyas soluciones no requieren cálculos voluminosos, pero ilustran bien una u otra tesis teórica. El objetivo de este punto consiste en ayudar al estudiante en su trabajo independiente sobre el material teórico, ofreciéndole la posibilidad de controlar por su propia cuenta la asimilación de los conceptos principales. Se presupone que el trabajo fundamental sobre el material teórico, estudiando con profundidad las demostraciones de los teoremas, se lleva a cabo guiándose por el mencionado manual

o los apuntes de las conferencias. Sin embargo, para solucionar algunos problemas, con frecuencia, es suficiente comprender la esencia del teorema (o de la fórmula). Muchas preguntas de control están orientadas a descubrir esta esencia. Del p. II el profesor puede tomar preguntas con el fin de comprobar el grado de preparación de los estudiantes para participar en los seminarios dedicados a uno u otro tema.

En el p. III —«Ejemplos de resolución de problemas»— vienen examinados ejemplos típicos que muestran cómo los resultados de la teoría pueden aplicarse en la práctica. Con esto gran atención se presta al análisis no sólo de los «procedimientos técnicos», sino que también a diferentes «puntos flacos», por ejemplo, a las condiciones de aplicabilidad de uno u otro teorema o fórmula. La cantidad de los ejemplos analizados varía en función del volumen y de la importancia del tema. A veces en el p. III se da respuesta a preguntas planteadas en el p. II.

El destino del p. IV —«Problemas y ejercicios para el trabajo independiente»— queda definido por su título. Los autores no tienden a dar gran cantidad de ejercicios, sino que prestan la mayor atención a su variedad. Al elegir los ejercicios, se usaron diferentes fuentes, entre cuyo número figuran los manuales de problemas bien conocidos, por ejemplo, el manual «Problemas y ejercicios de análisis matemático» revisado por el profesor B. P. Demidóvich, Mir, novena edición 1987. Por eso muchos problemas del material didáctico no pretenden ser originales, aunque entre ellos figura una serie de nuevos. Al final del libro se dan las respuestas e indicaciones para los problemas y ejercicios del p. IV.

El comienzo y el fin en las soluciones de los problemas se marcan mediante los signos △ y ▲, respectivamente, y en vez de la palabra «Indicación» se usa el signo ●.

Los autores confían en que el presente material didáctico ayudará a los estudiantes a dominar los métodos del análisis matemático, en su trabajo independiente sobre esta disciplina. También tienen esperanza de que este libro será útil para los profesores en su trabajo con los estudiantes y aceptarán con agradecimiento todas las sugerencias y opiniones encaminadas a mejorar el contenido de aquél.

Autores

Notaciones principales

$\mathbf{N}$,	conjunto de todos los números naturales
$\mathbf{Z}$,	conjunto de todos los enteros
$\mathbf{R}$,	conjunto de todos los números reales (recta numérica)
$[a, b]$,	segmento
(a, b),	intervalo
$[a, b)$, $(a, b]$,	semiintervalo (semisegmento) o bien intervalo semiabierto
$[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, a]$, $(-\infty, -a)$,	semirrecta
$\exists x$,	existe al menos un x
$\forall x$,	para todo x
$x \in X$,	el número x pertenece al conjunto X
$x \notin X$,	el número x no pertenece al conjunto X
$A \cup B$,	unión de los conjuntos A y B
$A \cap B$,	intersección de los conjuntos A y B
$A \setminus B$,	diferencia de los conjuntos A y B
$\inf X$,	cota inferior exacta del conjunto X
$\sup X$,	cota superior exacta del conjunto X
$\{x_n\}$, (x_n),	sucesión numérica
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$,	serie numérica
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,	el número a es el límite de la sucesión $\{x_n\}$
$y_n \ll x_n$,	la sucesión infinitamente grande $\{x_n\}$ tiene un orden de crecimiento más alto que la sucesión infinitamente grande $\{y_n\}$
$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$,	límite inferior de la sucesión $\{x_n\}$
$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$,	límite superior de la sucesión $\{x_n\}$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $f(x) \to b$, cuando $x \to a$,	el número b es el límite de la función $f(x)$, cuando x tiende a a
$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$,	el número b es el límite de la función $f(x)$, cuando x tiende a a por la derecha (por la izquierda)
$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$,	la función $f(x)$ es infinitamente grande en el punto a por la derecha (por la izquierda)

$\inf_X f(x)$,	cota inferior exacta de la función $f(x)$ en el conjunto X
$\sup_X f(x)$,	cota superior exacta de la función $f(x)$ en el conjunto X
$D(x)$,	función de Dirichlet
$[x]$,	parte entera del número x
$\operatorname{sgn} x$,	función «signo x»
$\alpha \sim \beta$, cuando $x \to a$,	las infinitésimas α y β, cuando $x \to a$, son equivalentes
$\alpha = o(\beta)$, cuando $x \to a$,	$\alpha(x)$ es una infinitésima de orden más alto que $\beta(x)$, cuando $x \to a$
Δy,	incremento de la función en un punto
$f'(x)$, $y'(x)$,	derivada de la función $y = f(x)$ en el punto x
$f'(x+0)$, $f'(x-0)$,	derivada derecha (izquierda) en el punto x
$\mathrm{d}y$,	diferencial de la función $y(x)$
$f^{(n)}(x)$,	derivada de n-ésimo orden de la función $f(x)$
$\mathrm{d}^n y$,	diferencial de n-ésimo orden de la función $y(x)$
$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$,	función vectorial (función vector)
$\int f(x)\,\mathrm{d}x$,	integral indefinida de la función $f(x)$
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,	integral definida de la función $f(x)$ por el segmento $[a, b]$
$\int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$,	integral de Lebesgue de la función $f(x)$ sobre el conjunto E
$f(x) \approx g(x)$ en E,	las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes en el conjunto medible E

Capítulo I
Números reales

§ 1. Comparación de los números reales

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Representación de los números reales en forma de fracciones decimales infinitas. Cualquier número real a puede ser representado en forma de una fracción decimal infinita:

$$a = \pm a_0,\ a_1 a_2\ \ldots\ a_n\ \ldots,$$

donde de los dos signos «$\pm$» se toma uno de ellos: el más, para los números positivos; el menos, para los números negativos (habitualmente el signo «más» no se escribe).

Los números racionales pueden ser representados en forma de fracciones decimales ilimitadas periódicas, en tanto que los números irracionales, en forma de fracciones decimales ilimitadas aperiódicas. Algunos números racionales pueden representarse en forma de una fracción finita o, lo que es lo mismo, en forma de una fracción infinita con cero en el período. Semejantes números admiten la segunda representación: en forma de una fracción decimal infinita con la cifra 9 en el período. Por ejemplo,

$$1/2 = 0{,}500\ldots0\ldots = 0{,}5(0), \qquad 1/2 = 0{,}4999\ldots9\ldots = 0{,}4\,(9).$$

Al comparar números reales, aprovecharemos para semejantes números racionales sólo de la primera forma de anotación (con cero en el período).

2. Regla de comparación de los números reales. Sean $a = \pm a_0,\ a_1 a_2\ \ldots\ a_n\ \ldots$ y $b = \pm b_0,\ b_1 b_2\ \ldots\ b_n\ \ldots$ números reales arbitrarios representados en forma de fracciones decimales infinitas.

Los números a y b se llaman *iguales* ($a = b$), si tienen signos idénticos y son válidas las igualdades $a_k = b_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. En el caso contrario se considera que $a \neq b$.

Para comparar dos números desiguales a y b examinemos tres casos:

1) a y b son números no negativos. Puesto que $a \neq b$, existe un número natural n (o bien $n = 0$) tal, que $a_k = b_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ y $a_n \neq b_n$. Consideraremos que $a > b$, si $a_n > b_n$, y $a < b$, si $a_n < b_n$;

2) a es un número no negativo y b, un número negativo. Vamos a adoptar que $a > b$;

3) a y b son números negativos. Diremos que $a > b$, si $|a| < |b|$, y $a < b$, si $|a| > |b|$.

3. Algunos conjuntos de números. Los números reales pueden representarse mediante puntos en la recta de coordenadas*. Por eso el conjunto de todos los números reales se llama *recta numérica*, mientras que los propios números se denominan *puntos*, en tanto que al examinar los conjuntos de números con frecuencia se aprovecha su interpretación geométrica. Utilicemos las siguientes notaciones y terminología:

N, *conjunto de todos los números naturales*;

Z, *conjunto de todos los números enteros*;

$\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$, *conjunto de todos los números reales* (*recta numérica*);

$[a, b]$, *segmento*, o sea, el conjunto de todos los números reales x que satisfacen las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$;

(a, b), *intervalo*, es decir, el conjunto de todos los números reales x que satisfacen las desigualdades $a < x < b$;

$[a, b)$ o $(a, b]$, *semiintervalo* (*semisegmento*), o sea, el conjunto de todos los números reales x que satisfacen respectivamente las desigualdades $a \leqslant x < b$, $a < x \leqslant b$;

$[a, +\infty)$ o $(a, +\infty)$ o bien $(-\infty, a]$ o por último $(-\infty, a)$, *semirrecta*, o bien, el conjunto de todos los números reales x que satisfacen respectivamente las desigualdades $a \leqslant x < +\infty$, $a < x < +\infty$, $-\infty < x \leqslant a$, $-\infty < x < a$;

al segmento, al semiintervalo, a la semirrecta y a la recta numérica también los llamaremos simplemente *intervalo*;

llamaremos *entorno* del punto c a todo intervalo que contenga el punto c;

diremos *entorno* ε del punto c al intervalo $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, donde $\varepsilon > 0$.

II. Preguntas y tareas de control

1. ¿En qué consiste la diferencia entre las fracciones decimales infinitas que representan los números racionales y los irracionales?
2. ¿En qué caso se dice que dos números son iguales?
3. ¿Son válidas o no las igualdades $0{,}41\,(9) = 0{,}42\,(0) = 0{,}42$?
4. Formúlese la regla de comparación de dos números desiguales.

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Demostrar que para cada dos números reales cualesquiera a y b $(a < b)$ se encontrará un número racional c tal que $a < c < b$.

* Recordemos que se llama recta de coordenadas aquella en la que se han elegido el origen o punto de referencia, cierto segmento de escala y el sentido positivo.

△ Para evidenciar, sean los números a y b positivos, es decir,

$$a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots > 0,$$
$$b = b_0, b_1 b_2 \ldots b_k \ldots > 0.$$

Si alguno de éstos es un número racional, expresado por medio de una fracción con período de 9, podemos escribirlo en forma de la fracción con período de 0. Según el planteamiento $a < b$. Esto significa que existe un número entero no negativo n tal que $a_k = b_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ y $a_n < b_n$. Puesto que la cifra 9 no es el período del número a, se encontrará un número natural $i > n$ tal, que $a_i \neq 9$.

Examinemos el número racional $c = c_0, c_1 c_2 \ldots c_i$, donde $c_k = a_k$ $(k = 0, 1, \ldots, i-1)$, $c_i = a_i + 1$. El número c es mayor que a, puesto que $c_k = a_k$ $(k = 0, 1, \ldots, i-1)$, $c_i = a_i + 1 > a_i$, y menor que b, puesto que $c_k = a_k = b_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, $c_n = a_n < b_n$. De esta manera, existe un número racional c tal que $a < c < b$.▲

2. Demostrar que para cada dos números reales cualesquiera a y b $(a < b)$ se encontrará un número irracional α tal, que $a < \alpha < b$.

△ Teniendo en cuenta las suposiciones del ejemplo 1, examinemos el número

$$\alpha = c_0, c_1 c_2 \ldots c_i\, 01001\, 0001 \ldots \underbrace{000 \ldots 0}_{n \text{ ceros}}1\ \underbrace{000 \ldots 0}_{n+1 \text{ ceros}}1 \ldots$$

Es evidente que esta fracción es aperiódica (explíquese por qué), es decir, α es un número irracional. Este número es mayor que a, puesto que $c_k = a_k$ $(k = 0, 1, \ldots, i-1)$, $c_i = a_i + 1 > a_i$, y menor que b, puesto que $c_k = b_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, $c_n = a_n < b_n$. Así pues, existe un número irracional α tal que $a < \alpha < b$. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

1. Demuéstrese que $\sqrt{8}$ es un número irracional.

2. Represéntese la fracción 31,2 (88) en forma de otra ordinaria.

3. Demuéstrese que toda fracción decimal periódica, que no contiene la cifra 9 en el período, puede obtenerse como resultado de división de dos números naturales.

4. Demuéstrese que cualquier fracción decimal periódica, con la cifra 9 en el período, no puede obtenerse como resultado de división de los números naturales.

5. Demuéstrese que para cada dos números reales cualesquiera a y b $(a \neq b)$ existe una infinidad de números tanto racionales, como irracionales encerrados entre aquéllos.

6. Demuéstrese la transitividad de los signos «=», «>», es decir: a) si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$; b) si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

7. Demuéstrese que para cualquier número a son válidas las desigualdades $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.
8. Demuéstrese que si $x \leqslant y$, entonces $-x \geqslant -y$.

§ 2. Cotas exactas del conjunto de números. Empleo de símbolos de la lógica matemática

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Acerca del aprovechamiento de algunos símbolos lógicos. Sea X un conjunto no vacío de los números reales.

DEFINICIÓN. *Un conjunto X se llama* ***acotado superiormente (inferiormente)****, si existe al menos un número M (m) tal que para todo número x del conjunto X se cumple la desigualdad* $x \leqslant M$ $(x \geqslant m)$. *El número M (m) se llama* ***cota superior (inferior)*** *del conjunto X.*

En esta definición, lo mismo que al enunciar muchos otros teoremas y definiciones, se emplean las expresiones «existe al menos un» y «para todo». Para abreviar la escritura aprovechemos en vez de estas expresiones los símbolos lógicos $\exists$ y $\forall$.

El símbolo $\exists$ se llama *cuantificador existencial* y el símbolo $\forall$, *cuantificador universal*. El hecho de que un número x pertenece (no pertenece) al conjunto X, lo anotaremos de la manera siguiente: $x \in X$ $(x \notin X)$.

Con ayuda de los símbolos indicados la definición del conjunto acotado superiormente puede escribirse así: el conjunto X se dice que está acotado superiormente, si $\exists M \in \mathbf{R}$ tal que $\forall x \in X$ se cumple la desigualdad $x \leqslant M$, o (en forma más breve, omitiendo algunas palabras): el conjunto X se llama acotado superiormente, si

$$\exists M \in \mathbf{R} \forall x \in X: x \leqslant M. \tag{1}$$

El uso de los cuantificadores no sólo reduce las anotaciones, sino que además permite, recurriendo a un procedimiento muy simple, construir las negaciones de las oraciones (definiciones, afirmaciones) escritas con ayuda de aquéllos. Ilustremos este procedimiento, tomando a título de ejemplo la negación de la definición de un conjunto acotado superiormente. En otras palabras, formulemos la definición del conjunto no acotado superiormente. La falta de acotación superior del conjunto X significa: no existe un número M tal, que para cualquier $x \in X$ se cumpla la desigualdad $x \leqslant M$. Esto significa que para todo número M existe al menos un $x \in X$, para el cual $x > M$. Por eso la definición del conjunto no acotado superiormente puede escribirse con ayuda de los cuantificadores de la manera siguiente: un conjunto X se llama no acotado superiormente, si

$$\forall M \in \mathbf{R}\ \exists x \in X: x > M. \tag{2}$$

Al comparar (1) y (2), vemos que para construir la negación de la oración (1) hay que sustituir el cuantificador $\exists$ por $\forall$ y el cuantifi-

cador $\forall$, por $\exists$, mientras que la desigualdad que va detrás de los dos puntos, se sustituye por la contraria.

Esta regla puede utilizarse también para construir negaciones de cualesquiera otras afirmaciones que contienen los cuantificadores $\exists$ y $\forall$.

2. Cotas exactas de los conjuntos de números

DEFINICIÓN. *Un número $\bar{x}$ se llama **cota superior exacta** del conjunto acotado superiormente X, si:* 1° $\forall x \in X: x \leqslant \bar{x}$; 2° $\forall \tilde{x} < \bar{x} \exists x \in X: x > \tilde{x}$.

La primera condición significa que $\bar{x}$ es una de las cotas superiores del conjunto X, mientras que la segunda condición, que $\bar{x}$ es la mínima de las cotas superiores del conjunto X, es decir, ningún número $\tilde{x}$ menor que $\bar{x}$, ya no es su cota superior. La cota superior exacta del conjunto X se designa con $\sup X$.

De manera análoga se define la cota inferior exacta* del conjunto acotado inferiormente X; ésta se designa con $\inf X$.

Teorema. *Un conjunto no vacío acotado superiormente (inferiormente) contiene la cota superior (inferior) exacta.*

Si el conjunto X no está acotado superiormente (inferiormente), entonces se escribe $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$).

Un conjunto X, limitado superior o inferiormente, se llama simplemente *acotado*, es decir,

$$\exists M, m \forall x \in X: m \leqslant x \leqslant M. \tag{3}$$

II. Preguntas y tareas de control

1. Escríbase empleando los cuantificadores la definición del conjunto acotado inferiormente. Anótese la negación de esta definición, aprovechando la regla de construcción de las negaciones.
2. Dése la definición de la cota superior (inferior) exacta de un conjunto acotado superiormente (inferiormente).
3. Enúnciese el teorema sobre la existencia de las cotas exactas de un conjunto de números.
4. Demuéstrese la unicidad de las cotas exactas, es decir, que un conjunto limitado superiormente (inferiormente) tiene sólo una cota superior (inferior) exacta.
5. Muéstrese que las cotas exactas pueden tanto pertenecer, como no pertenecer al conjunto. Cítense ejemplos de conjuntos de números X, en los cuales: a) $\sup X \in X$; b) $\sup X \notin X$; c) $\inf X \in X$; d) $\inf X \notin X$. ¿Tiene o no el conjunto X en los casos a) y b) el número máximo y en los casos c) y d), el mínimo?
6. ¿Qué significa la notación simbólica: a) $\sup X = +\infty$; b) $\inf X = -\infty$?

---

* En algunos manuales del análisis matemático la cota superior (inferior) exacta se llama simplemente cota superior (inferior).

7. ¿Qué conjunto se llama acotado?
8. Demuéstrese que la definición siguiente de un conjunto acotado: un conjunto X se llama acotado, si $\exists A > 0\ \forall x \in X:\ |x| \leqslant A$, es equivalente a la dada en el p. I.
9. Aplicando la regla de construcción de las negaciones a la definición aducida en la tarea 8, enúnciese la definición de un conjunto no acotado.

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Hallar la cota superior exacta del intervalo $(0, 1)$.

$\triangle$ El número 1 es la cota superior del intervalo $(0, 1)$, puesto que $\forall x \in (0, 1): x < 1$. Más aún, $\forall \tilde{x} < 1\ \exists a \in (0, 1):\ a > \tilde{x}$. En efecto, si $\tilde{x} \leqslant 0$, entonces $\forall a \in (0, 1):\ a > x$. Si $\tilde{x} > 0$, entonces como se ha mostrado en el ejemplo 1 § 1, en el intervalo $(\tilde{x}, 1)$ se encontrará un número racional a tal, que $\tilde{x} < a < 1$, es decir, $\exists a \in (0, 1)$: $a > \tilde{x}$. De esta manera, para el número 1 se cumplen ambas condiciones de definición de la cota superior exacta. Por consiguiente, $\sup (0, 1) = 1$. Cabe advertir que la cota exacta encontrada no pertenece al intervalo $(0, 1)$, o sea, $\sup (0, 1) \notin (0, 1)$, mientras que para el semisegmento $(0, 1]$ $\sup (0, 1] = 1 \in (0, 1]$. ▲

2. Hallar las cotas exactas del conjunto de todas las fracciones racionales propias m/n $(m, n \in \mathbf{N}, m < n)$ y mostrar que este conjunto no contiene los elementos mínimo y máximo.

$\triangle$ Sea X el conjunto de todas las fracciones racionales propias m/n. Puesto que $\forall m, n \in \mathbf{N}\ m/n > 0$, el número 0 resulta ser la cota inferior del conjunto X. Más aún,

$$\forall \tilde{x} > 0\ \exists a \in X:\ a < \tilde{x}. \tag{4}$$

En realidad, si $\tilde{x} \geqslant 1$, entonces la fracción racional propia $a = 1/2$ satisface la condición (4). Si $0 < \tilde{x} < 1$, entonces el número $\tilde{x}$ puede escribirse en forma de la siguiente fracción decimal infinita:

$$\tilde{x} = 0,\ x_1 x_2 \ldots x_k \ldots,$$

y además $\exists n$ tal que $x_n \neq 0$. El número racional

$$a = 0,\ x_1 x_2 \ldots x_{n-1} (x_n - 1)\, 1$$

según la regla de comparación de los números reales satisface las desigualdades $0 < a < \tilde{x} < 1$, o sea, es una fracción racional propia y satisface la condición (4).

De esta manera para el número 0 se ha cumplido también la segunda condición de definición de la cota inferior exacta del conjunto de números. Así, pues, $\inf X = 0$.

Puesto que el conjunto X contiene sólo fracciones propias, o sea, $m < n$, entonces $m/n < 1$. Por consiguiente, el número 1 es la cota superior del conjunto X. Más aún, $\forall \tilde{x} < 1 \ \exists m/n \in X$: $m/n > \tilde{x}$. En efecto, como se ha mostrado en el ejemplo 1 § 1, existe un número racional x_1 tal que $\tilde{x} < x_1 < 1$. Ya que $x_1 < 1$, entonces x_1 es una fracción propia: $x_1 = m/n$ $(m < n)$, o sea, $x_1 \in X$. Por consiguiente, para el número 1 se han cumplido ambas condiciones de definición de la cota superior exacta del conjunto de números. De esta manera, $\sup X = 1$.

Sin embargo, $\inf X = 0 \notin X$, ya que $m/n = 0$ sólo cuando $m = 0$, pero $0 \notin \mathbf{N}$. Esto significa que el conjunto X no contiene el elemento mínimo. De la misma manera $\sup X = 1 \notin X$, puesto que $m/n = 1$, sólo cuando $m = n$, lo cual contradice al requisito de que la fracción es propia. Entonces el conjunto X no contiene el elemento máximo.▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

9. Sean X e Y dos conjuntos no vacíos de números reales, además X está acotado superiormente, mientras que Y forma parte de X. Demuéstrese que Y también está acotado superiormente y $\sup Y \leqslant \sup X$.

10. Hállense las cotas exactas de un conjunto de números racionales x que satisfagan la desigualdad $x^2 < 2$.

11. Sea A un conjunto de números con signo opuesto a los números que pertenecen al conjunto B. Demuéstrese que: a) $\inf A = -\sup B$; b) $\sup A = -\inf B$.

§ 3. Operaciones aritméticas con los números reales

I. Nociones fundamentales

1. Adición y multiplicación de los números racionales. Para los números racionales se conocen las reglas de adición y de multiplicación siguientes:

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}, \quad \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}. \tag{1}$$

Determinemos las operaciones de adición y de multiplicación para cualesquiera números reales.

2. Adición de los números reales. Sean x e y dos números reales arbitrarios y x_1 e y_1, cualesquiera números racionales que satisfagan las desigualdades

$$x_1 \leqslant x, \ y_1 \leqslant y. \tag{2}$$

En adelante, el símbolo $(x_1 + y_1)_r$ significará que los números x_1 e y_1 se suman según la regla (1) de adición de los números racionales. Examinemos el conjunto $\{(x_1 + y_1)_r\}$ de toda clase de sumas de los números racionales x_1 e y_1 que satisfacen la condición (2). Este conjunto está acotado superiormente y, por consiguiente, tiene la cota superior exacta.

Se llama *suma* de los números reales x e y sup $\{(x_1 + y_1)_r\}$.

3. Multiplicación de los números reales. Sean x e y dos números reales positivos arbitrarios, mientras que x_1 e y_1 cualesquiera números racionales que satisfagan las desigualdades $0 < x_1 \leqslant x$, $0 < y_1 \leqslant \leqslant y$. En lo sucesivo el símbolo $(x_1 y_1)_r$ significará que los números x_1 e y_1 se multiplican según la regla (1) de multiplicación de los números racionales. Examinemos el conjunto $\{(x_1 y_1)_r\}$ de toda clase de productos de semejantes números racionales. Este conjunto está acotado superiormente y, por consiguiente, tiene la cota superior exacta.

Se llama *producto* de los números reales positivos x e y sup $\{(x_1 y_1)_r\}$.

El producto de los números reales de cualquier signo lo definiremos mediante las reglas siguientes:

1ª $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$;

$$2^a xy = \begin{cases} \;\;|x| \cdot |y|, \text{ si } x \text{ e } y \text{ tienen signos iguales;} \\ -|x| \cdot |y|, \text{ si } x \text{ e } y \text{ tienen signos diferentes.} \end{cases}$$

II. Preguntas y tareas de control

1. Formúlense las reglas de adición y de multiplicación de dos números reales cualesquiera. Demuéstrese que los conjuntos $\{(x_1 + y_1)_r\}$ y $\{(x_1 y_1)_r\}$ que figuran en estas reglas, están acotados superiormente.
2. Demuéstrese que la regla de adición de los números reales tiene las siguientes propiedades: a) $x + y = y + x$ (conmutatividad); b) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociatividad).
3. Demuéstrese que la regla de multiplicación de los números reales tiene las siguientes propiedades: a) $xy = yx$ (conmutatividad); b) $(xy)\,z = x\,(yz)$ (asociatividad).

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Demostrar que la adición de dos números racionales según la regla de adición de los números reales da el mismo resultado que su adición aplicando la regla (1) para los números racionales.

△ Sean x e y dos números racionales arbitrarios y $(x + y)_r$, su suma obtenida según la regla de adición de los números racionales, $(x + y)$, la suma obtenida recurriendo a la regla de adición de los números reales, es decir, $x + y = \sup \{(x_1 + y_1)_r\}$ donde x_1 e y_1 son cualesquiera números racionales que satisfagan las desigualda-

des $x_1 \leqslant x$, $y_1 \leqslant y$. Hay que demostrar que $x+y=(x+y)_r$ o bien

$$\sup\{(x_1+y_1)_r\}=(x+y)_r.$$

Para esto según la definición de la cota superior exacta del conjunto hace falta mostrar que:

1° $\forall (x_1+y_1)_r \in \{(x_1+y_1)_r\}$: $(x_1+y_1)_r \leqslant (x+y)_r$;

2° $\forall \tilde{x} < (x+y)_r\ \exists (x_1+y_1)_r \in \{(x_1+y_1)_r\}$: $(x_1+y_1)_r > \tilde{x}$.

Puesto que $x_1 \leqslant x$ e $y_1 \leqslant y$, entonces $(x_1+y_1)_r \leqslant (x+y)_r$ (para los números racionales se conoce esta propiedad de las desigualdades). Por consiguiente, se cumple la 1ª condición. Mostremos que también se ha cumplido la 2ª condición.

Sea $\tilde{x}$ un número arbitrario, menor que $(x+y)_r$. Entre los números $\tilde{x}$ y $(x+y)_r$ se encontrará un número racional a (véase el ejemplo 1 del § 1): $\tilde{x} < a < (x+y)_r$. Supongamos $\delta=(x+y)_r - a$ (la resta se efectúa según la regla de sustracción de los números racionales). Entonces $a=(x+y)_r-\delta$ y, puesto que $\delta>0$, tendremos que existe un número natural n tal, que $2/n<\delta$.

Examinemos ahora los números racionales $x_1=x-\frac{1}{n}$ e $y_1=y-\frac{1}{n}$. Ya que $x_1<x$ e $y_1<y$, resulta que $(x_1+y_1)_r \in \{(x_1+y_1)_r\}$. Además $(x_1+y_1)_r=(x+y)_r-\frac{2}{n}>(x+y)_r-\delta=a$, puesto que $\frac{2}{n}<\delta$.

Así pues, $(x_1+y_1)_r>a>\tilde{x}$, es decir, $(x_1+y_1)_r>\tilde{x}$. De esta manera hemos mostrado que está cumplida la 2ª condición. ▲

2. Demostrar que $\forall x$: $x+(-x)=0$.

△Sean x_1 e y_1 dos números racionales cualesquiera que satisfagan las desigualdades $x_1 \leqslant x$, $y_1 \leqslant -x$. Hay que demostrar que $\sup\{(x_1+y_1)_r\}=0$, es decir,

1° $\forall\,(x_1+y_1)_r \in \{(x_1+y_1)_r\}$: $(x_1+y_1)_r \leqslant 0$;

2° $\forall \tilde{x}<0\ \exists\,(x_1+y_1)_r \in \{(x_1+y_1)_r\}$: $(x_1+y_1)_r>\tilde{x}$.

Puesto que $y_1 \leqslant -x$, entonces $-y_1 \geqslant x$ (esto se comprueba fácilmente, aprovechando la regla de comparación de los números reales; véase el ejer. 8 del § 1). De las desigualdades $x_1 \leqslant x$ y $x \leqslant -y_1$ en vigor de la transitividad del signo «$\leqslant$» se deduce que $x_1 \leqslant -y_1$ y, por consiguiente, $(x_1+y_1)_r \leqslant 0$. De esta manera se ha cumplido la 1ª condición.

Mostremos que también queda cumplida la 2ª condición. Sea $\tilde{x}$ un número negativo arbitrario. Puesto que $-\tilde{x}>0$, se encontrará

un número natural n tal, que $1/10^n < -\tilde{x}$, es decir, $-1/10^n > \tilde{x}$. Presentemos el número x en forma de una fracción decimal infinita (consideremos para precisar que $x > 0$):

$$x = x_0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots .$$

De la regla de comparación de los números reales se deduce que

$$x_1 = x_0, x_1 x_2 \ldots x_n \leqslant x,$$

$$y_1 = -x_0. x_1 x_2 \ldots x_n - \frac{1}{10^n} \leqslant -x.$$

De esta manera $(x_1 + y_1)_r \in \{(x_1 + y_1)_r\}$. Además $(x_1 + y_1)_r = -1/10^n > \tilde{x}$, es decir, hemos demostrado que se ha cumplido la 2ª condición. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

12. Demuéstrese que la multiplicación de dos números racionales según la regla de multiplicación de los números reales da el mismo resultado que su multiplicación empleando la regla (1) para los números racionales.

13. Demuéstrese que $\forall x$: $x + 0 = x$.

14. Demuéstrese que $\forall x, y$ existe el único número z tal que $x = y + z$ (z se llama diferencia de los números x e y: $z = x - y$).

15. Demuéstrese que $\forall x$: $x \cdot 1 = x$.

16. Demuéstrese que $\forall x \neq 0 \, \exists x'$: $xx' = 1$.

17. Demuéstrese que $\forall x$ y $\forall y \neq 0$ existe el único número z tal, que $x = yz$ (z se llama cociente de los números x e y: $z = x/y$).

18. Demuéstrese que $\forall x, y, z$: $(x + y)\, z = xz + yz$.

19. Demuéstrese que si $x > y$, entonces $\forall z$: $x + z > y + z$.

20. Demuéstrese que si $x > y$, entonces $\forall z > 0$: $xz > yz$.

21. Demuéstrese la validez de las desigualdades: a) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$; b) $|x - y| \geqslant |x| - |y|$.

22. Sean X, Y dos conjuntos acotados no vacíos de los números reales y T, un conjunto de toda clase de sumas $x + y$, donde $x \in X$, $y \in Y$. Demuéstrese que el conjunto T está acotado y que: a) $\sup T = \sup X + \sup Y$; b) $\inf T = \inf X + \inf Y$.

23. Sean X, Y dos conjuntos acotados no vacíos de los números reales no negativos y B, un conjunto de toda clase de productos xy, donde $x \in X$, $y \in Y$. Demuéstrese que el conjunto B está acotado y que: a) $\sup B = \sup X \cdot \sup Y$; b) $\inf B = \inf X \cdot \inf Y$.

24. Calcúlense las tres primeras cifras significativas de la suma: a) $\frac{1}{7} + \sqrt{3}$, b) $\sqrt{3} + \sqrt{7}$.

25. Hállense los tres primeros dígitos decimales del producto a) $\frac{1}{7}\sqrt{3}$; b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$.

28. Sean A y B dos conjuntos no vacíos de los números reales, en los cuales cada número de A es menor que todo número de B y para cualquier $\varepsilon > 0$ existen $x \in A$ e $y \in B$ tales, que $y - x < \varepsilon$. Demuéstrese que $\sup A = \inf B$.

§ 4. Método de inducción matemática

I. Conceptos fundamentales

Para demostrar que cierta afirmación es válida para todo número natural n, empezando por n_0, es suficiente demostrar que:

a) esta afirmación es válida para $n = n_0$;

b) si la afirmación dada es válida para cierto número natural $k \geqslant n_0$, también es válida para el número natural que le sigue $k + 1$.

Semejante método de demostración se llama *método de inducción matemática*.

II. Preguntas de control

1. ¿En qué consiste el método de inducción matemática?
2. Aplicando el método de inducción matemática, demuéstrese que $\forall n \in \mathbf{N}$: $n \leqslant 2^{n-1}$.

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Demostrar que $\forall n \in \mathbf{N}$ y $\forall x > -1$ es válida la desigualdad

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx \text{ (DESIGUALDAD DE BERNOULLI).} \qquad (1)$$

△ Demostremos la desigualdad (1) aplicando el método de inducción matemática. Si $n = 1$, entonces la desigualdad (1) es válida, puesto que se reduce a la igualdad lícita. Supongamos que la correlación (1) es válida para el número natural k y $\forall x > -1$:

$$(1 + x)^k \geqslant 1 + kx. \qquad (2)$$

Ya que $x > -1$, $1 + x > 0$. Multipliquemos la desigualdad (2) por el número positivo $1 + x$:

$$(1 + x)^{k+1} \geqslant 1 + kx + x + kx^2.$$

Suprimiendo el sumando no negativo kx^2 en el segundo miembro, obtenemos la desigualdad

$$(1 + x)^{k+1} \geqslant 1 + (k + 1)\, x.$$

Hemos demostrado que la desigualdad (1) es válida para el número natural $k + 1$ y $\forall x > -1$. Con esto está demostrado que la correlación (1) es válida $\forall n \in \mathbf{N}$ y $\forall x > -1$. ▲

2. Demostrar que para cualesquiera n números positivos y_1, y_2, . . ., y_n, que satisfagan la condición de

$$y_1 y_2 \ldots y_n = 1, \qquad (3)$$

tiene lugar la correlación

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n \geqslant n. \qquad (4)$$

△ Cuando $n = 1$, de la condición (3) se deduce que $y_1 = 1$. Por esto la correlación (4) está cumplida.

Supongamos que, cuando $n = k$, de la condición (3) se deduce la correlación (4) y que $k + 1$ números positivos $y_1, y_2, \ldots, y_k, y_{k+1}$ satisfacen la condición (3). Demostremos que para éstos queda cumplida la correlación (4). Si todos estos números son iguales a 1, su suma será igual a $k + 1$ y la correlación (4) tiene lugar. Pero si entre los números indicados existe al menos uno distinto de 1, entonces obligatoriamente se encontrará un número más que no sea igual a 1. Con la particularidad de que si uno de estos últimos números es mayor que 1, el otro será menor que 1. Sin desviarnos de la generalidad supongamos que $y_k > 1$, $y_{k+1} < 1$. El producto k de los números $y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k y_{k+1}$ en virtud de la condición (3) es igual a 1. Por eso según la suposición inductiva

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{k-1} + y_k y_{k+1} \geqslant k.$$

De aquí obtenemos

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{k+1} + y_k y_{k+1} \geqslant k + y_k + y_{k+1},$$

o bien

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{k+1} \geqslant k + 1 + y_k + y_{k+1} - y_k y_{k+1} - 1 =$$
$$= k + 1 + (1 - y_{k+1})(y_k - 1) \geqslant k + 1,$$

es decir, la correlación (4) está cumplida para $n = k + 1$. De esta manera para cualesquiera n números positivos que satisfagan la condición (3), se ha cumplido la correlación (4).▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

Aplicando el método de inducción matemática, demuéstrese que $\forall n \in \mathbf{N}$ son válidas las igualdades:

27. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = 0{,}5\, n(n + 1)$.

28. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1)$.

29. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = 0{,}25\, n^2 (n + 1)^2$.

Valiéndose del método de inducción matemática, demuéstrese la validez de las desigualdades:

30. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

31. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ $(n \geqslant 2)$.

32. $n^{n+1} > (n+1)^n$ $(n \geqslant 3)$.

33. $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$, cuando $x_k \geqslant 0$, $k=1, \ldots n$ (la media geométrica de n números no negativos no supera su media aritmética);

34. $\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{n} \leqslant 0{,}5(1+\sqrt{4a+1})$, $\forall a>0$.

Capítulo II
Límite de una sucesión

§ 1. Sucesiones acotadas y no acotadas. Límite de una sucesión

I. Conceptos y teoremas fundamentales

Si a cada número natural n se ha puesto en correspondencia cierto número x_n, se dice que hemos definido una *sucesión numérica* (o simplemente una *sucesión*) $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$. En forma abreviada la sucesión se denota con el símbolo $\{x_n\}$ o (x_n). El número x_n recibe el nombre de *término* (*elemento*) de la sucesión y n, *número* del término.

Las sucesiones de las formas $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n-y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n/y_n\}$ se llaman *suma*, *diferencia*, *producto* y *cociente* de dos sucesiones, respectivamente: $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ (para el cociente $y_n \neq 0$).

DEFINICIÓN. *La sucesión $\{x_n\}$ se llama* ***acotada***, *si* $\exists M>0$ tal que $\forall n$: $|x_n| \leqslant M$.

Desde el punto de vista geométrico esto significa que todos los términos de la sucesión se encuentran en cierto entorno (entorno M) del punto $x=0$.

DEFINICIÓN. *La sucesión $\{x_n\}$ se llama* ***no acotada***, *si* $\forall M>0$ $\exists\, n$: $|x_n|>M$.

DEFINICIÓN. *El número a recibe el nombre de* ***límite de la sucesión*** $\{x_n\}$, *si* $\forall \varepsilon>0$ $\exists N \in \mathbf{N}$ *tal que* $\forall n>N$: $|x_n-a|<\varepsilon$. Su notación es: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Desde el punto de vista geométrico esto significa que en todo entorno ε del punto a se encuentran todos los términos de la sucesión, empezando por cierto número (que depende, hablando en general, de ε) o, lo que es lo mismo, fuera de todo entorno ε del punto a se encuentra sólo un número finito de términos de la sucesión.

La sucesión que tiene límite se llama *convergente* y la sucesión que no lo tiene, *divergente*.

Teorema 1. *Una sucesión convergente tiene sólo un límite.*

Teorema 2 (CONDICIÓN NECESARIA DE CONVERGENCIA DE UNA SUCESIÓN). *La sucesión convergente está acotada.*

II. Preguntas y tareas de control

1. Enúnciense las definiciones: a) de la sucesión; b) de la sucesión acotada y de la no acotada; c) del límite de una sucesión. Dése la interpretación geométrica de estas definiciones.
2. ¿Es equivalente la definición del límite de una sucesión a la siguiente definición: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, si $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ un número positivo K (no obligatoriamente natural) tal que $\forall n > K$: $|x_n - a| < \varepsilon$?
3. Muéstrese, citando un ejemplo, que el número N, que figura en la definición del límite de la sucesión, depende, hablando en general, de ε.
4. Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ y el número a satisfacen la condición: $\exists N$ tal, que $\forall \varepsilon > 0$ y $\forall n > N$: $|x_n - a| < \varepsilon$. ¿Satisfará toda sucesión que converge hacia a esta condición? ¿Cuál será la interpretación geométrica de esta condición?
5. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

   a) ¿Podrán todos los términos de la sucesión ser positivos (negativos), si $a = 0$?

   b) ¿Podrá la sucesión tener una cantidad infinita de términos negativos (iguales a cero), si $a > 0$; $a \neq 0$?

   c) Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+2} = a$.

   d) Demuéstrese que $\{x_n\}$ está acotada.
6. Supongamos que en cierto entorno del punto a se halla una cantidad infinita de términos de la sucesión $\{x_n\}$. ¿Se podrá deducir de esta condición que: a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$? b) ningún punto fuera de este entorno sea el límite de la sucesión $\{x_n\}$? c) $\{x_n\}$ está acotada?
7. Supongamos que en todo entorno del punto a se halla una cantidad infinita de términos de la sucesión $\{x_n\}$. ¿Se podrá deducir de aquí que: a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$? b) $\{x_n\}$ está acotada?
8. ¿Qué sucesión se llama: a) convergente; b) divergente?
9. Sea que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada (no acotada). ¿Se podrá deducir de esta condición que aquélla converge (diverge)?
10. Supongamos que la sucesión converge. ¿Será convergente la sucesión que se obtiene a partir de la inicial, si:

    a) de ésta se elimina un número finito de términos y los restantes se enumeran de nuevo en orden de su secuencia?

    b) a aquélla se agrega un número finito de términos, enumerando los términos de la sucesión en orden de su secuencia?

c) se cambia en aquélla de manera arbitraria un número finito de términos?

11. Demuéstrese que la sucesión convergente tiene sólo un límite.
12. Enúnciese la condición necesaria de convergencia de una sucesión.

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Enunciar en el lenguaje «$\varepsilon - N$» la definición de que el número a no es el límite de la sucesión $\{x_n\}$ ($a \neq \lim\limits_{n\to\infty} x_n$) y dar la interpretación geométrica de esta definición.

△ Según la definición del límite de la sucesión $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, si $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ tal que $\forall n > N$: $|x_n - a| < \varepsilon$. Aprovechando la regla de construcción de las negaciones, obtenemos: $a \neq \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, si $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall N\ \exists n > N$: $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$.

De manera más detallada esto puede escribirse así: $a \neq \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, si $\exists \varepsilon > 0$ tal que:

para $N = 1\quad \exists n_1 > 1$: $\quad |x_{n_1} - a| \geqslant \varepsilon$,

para $N = 2\quad \exists n_2 > 2$: $\quad |x_{n_2} - a| \geqslant \varepsilon$,

. . . .

para $N = 100\quad \exists n_{100} > 100$: $\quad |x_{n_{100}} - a| \geqslant \varepsilon$.

. . . .

De este modo $a \neq \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, si existe $\varepsilon > 0$ y la sucesión de los números $\{n_N\}$ ($N = 1, 2, 3, \ldots$) tales, que $n_N > N$ y $|x_{n_N} - a| \geqslant \varepsilon$.

La interpretación geométrica de esta definición es: $a \neq \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, si existe cierto entorno ε del punto a, fuera del cual se encuentra una cantidad infinita de términos de la sucesión. ▲

2. Demostrar que la sucesión $x_n = 2^{n(-1)^n}$ no está acotada.

△ En virtud de la definición de la sucesión no acotada hay que mostrar que $\forall M > 0\ \exists n \in \mathbf{N}$, para el cual $|x_n| > M$. Prefijemos un número $M > 0$ arbitrario y tomemos cualquier número par n que satisfaga la desigualdad $n > \log_2 M$. Para tal n tenemos

$$x_n = 2^n > 2^{\log_2 M} = M,$$

lo que se trataba de demostrar. ▲

3. Valiéndose de la definición para el límite de la sucesión demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5\cdot 3^n}{3^n - 2} = 5$.

△ Prefijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario y examinemos el módulo de la diferencia entre el n-ésimo término de la sucesión y el número 5:

$$\left| \frac{5\cdot 3^n}{3^n - 2} - 5 \right| = \frac{10}{3^n - 2}.$$

En correspondencia con la definición del límite de una sucesión debemos indicar un número N tal que $\forall n > N$ se cumpla la desigualdad

$$\frac{10}{3^n-2} < \varepsilon. \tag{1}$$

Para encontrar el número N resolvemos la desigualdad (1) respecto a n. Obtendremos

$$n > \log_3\left(\frac{10}{\varepsilon}+2\right). \tag{2}$$

De la desigualdad (2) se deduce que como N puede tomarse la parte entera del número $\log_3\left(\frac{10}{\varepsilon}+2\right)$:

$$N=\left[\log_3\left(\frac{10}{\varepsilon}+2\right)\right].$$

En efecto, si $n > N$, entonces

$$n \geqslant \left[\log_3\left(\frac{10}{\varepsilon}+2\right)\right]+1 > \log_3\left(\frac{10}{\varepsilon}+2\right),$$

o sea, es cierta la desigualdad (2) y en este caso $\forall n > N$ se cumple también la desigualdad (1). (Cabe señalar que, cuando $\varepsilon > 10$, tenemos $N = \left[\log_3\left(\frac{10}{\varepsilon}+2\right)\right] = 0$ y por eso la desigualdad (1) es válida $\forall n \in \mathbf{N}$.)

Así, pues, para un $\varepsilon > 0$ arbitrario hemos indicado un número $N=\left[\log_3\left(\frac{10}{\varepsilon}+2\right)\right]$ tal que $\forall n > N$ se cumple la desigualdad

$$\left|\frac{5\cdot 3^n}{3^n-2}-5\right| < \varepsilon.$$

Según la definición del límite de una sucesión esto significa que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n}{3^n-2}=5. \quad ▲$$

4. Aprovechando la definición de límite de una sucesión, demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}=0$.

△ Adoptemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Es necesario indicar un número N tal que $\forall n > N$ se cumpla la desigualdad

$$1/\sqrt{n!} < \varepsilon. \tag{3}$$

No vamos a tender a encontrar el número N mínimo, empezando por el cual se cumple la desigualdad (3). Indiquemos un número «con cierta reserva», resolviendo una desigualdad más simple

$$2/n < \varepsilon. \tag{4}$$

Puesto que $\forall n \in \mathbf{N}$: $n! > n\,(n/4)$ (demuéstrenlo), entonces $\forall n \in \mathbf{N}$ es cierta la desigualdad

$$1/\sqrt{n!} < 2/n \tag{5}$$

y por eso la desigualdad (3) es corolario de la desigualdad (4). Resolviendo respecto a n la desigualdad (4), obtenemos

$$n > 2/\varepsilon. \tag{6}$$

Hagamos $N = [2/\varepsilon]$. Si $n > N$, resulta que $n \geqslant [2/\varepsilon] + 1 > 2/\varepsilon$, es decir, se cumple la desigualdad (6) y, por consiguiente, las desigualdades (4) y (3). De esta manera, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ (N = [2/\varepsilon])$ tal que $\forall n > N$: $1/\sqrt{n!} < \varepsilon$. Con esto queda demostrado que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} = 0$. ▲

Los ejemplos examinados muestran de qué manera hace falta demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, recurriendo a la definición para el límite de una sucesión. Hay que escribir la expresión $|x_n - a|$ y elegir (si esto es conveniente) una sucesión $\{y_n\}$ tal que, en primer lugar, $\forall n\ |x_n - a| \leqslant y_n$, en segundo lugar, la desigualdad

$$y_n < \varepsilon, \tag{7}$$

para un ε arbitrario, se resuelva de la manera suficientemente simple respecto a n. Supongamos que la solución de la desigualdad (7) tiene la forma

$$n > f(\varepsilon),$$

donde $f(\varepsilon) > 0$. Entonces a título de N puede tomarse $[f(\varepsilon)]$ (en caso de que resulte que $[f(\varepsilon)] = 0$, la desigualdad (7) será válida $\forall n$). De esta manera, $\forall n > N = [f(\varepsilon)]$ resultará cumplida la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$, y esto precisamente significa, según la definición para el límite de una sucesión, que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

5. Se sabe que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ y $x_n \geqslant 0\ \forall n$. Demostrar que para $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^\alpha = 0$.

△ Según el planteamiento, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, es decir, $\forall \varepsilon_1 > 0$ $\exists N_1$ tal que $\forall n > N_1$ es válida la desigualdad

$$|x_n| < \varepsilon_1. \tag{8}$$

Demuéstrese: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ tal que $\forall n > N$: $|x_n^\alpha| < \varepsilon$ o, lo que es equivalente,

$$|x_n| < \varepsilon^{1/\alpha}. \tag{9}$$

Prefijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario y pongamos $\varepsilon_1 = \varepsilon^{1/\alpha}$ $(\varepsilon_1 > 0)$. Para este $\varepsilon_1 \exists N_1$ tal que $\forall n > N_1$ es válida la desigualdad (8), es decir, $|x_n| < \varepsilon^{1/\alpha}$. Así pues, $\forall n > N = N_1$ es cierta la desigualdad (9). Con esto queda demostrado que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^\alpha = 0$. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

1. ¿Estarán acotadas las sucesiones: a) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$; b) $x_n = 2n$; c) $x_n = \ln n$; d) $x_n = \operatorname{sen} n$; e) $\{x_n\} = 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, \ldots$? Arguméntense las respuestas.

2. Valiéndose de la definición para el límite de una sucesión, demuéstrese que:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n+3} = 2$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_n 2 = 0$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+2n+1} = 0$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} (0{,}8)^n = 0$; g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+5\cdot 6^n}{3^n+6^n} = 5$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\operatorname{sen} n^2}{n+1} = 0$.

3. Se conoce que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Demuéstrese que:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = a^2$.

4. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$. ¿Se puede deducir de aquí que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?

5. Demuéstrese que la sucesión $\{x_n\}$ diverge, si: a) $x_n = n$; b) $x_n = \ln n$; c) $x_n = n^{(-1)^n}$.

6. Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ converge y $M = \sup\{x_n\}$, $m = \inf\{x_n\}$. Demuéstrense que: o $\exists n$ tal que $x_n = M$; o bien $\exists k$ tal que $x_k = m$; o por último $\exists n$ y k tales, que $x_n = M$, $x_k = m$. Cítense ejemplos de sucesiones de estos tres tipos.

§ 2. Sucesiones infinitésimas e infinitas

I. Conceptos y teoremas fundamentales

DEFINICIÓN. *Una sucesión* $\{x_n\}$ se llama ***infinitésima** o **infinitamente pequeña***, *si* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

DEFINICIÓN. *Una sucesión* $\{x_n\}$ *se llama* ***infinita*** o ***infinitamente grande***, *si* $\forall A > 0\ \exists N$ *tal que* $\forall n > N$: $|x_n| > A$.

Desde el punto de vista geométrico esto significa que en todo entorno (tan grande como se quiera) de cero se encuentra sólo un número finito de términos de la sucesión, mientras que fuera del mismo, una cantidad infinita de términos.

Si la sucesión $\{x_n\}$ es infinita, entonces se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Si además, empezando por cierto número, todos los términos de la

sucesión infinita son positivos (negativos), entonces se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} = +\infty$ $(-\infty)$. Es de advertir que la sucesión infinita no es convergente y la anotación simbólica $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $(-\infty)$ sólo significa que la sucesión $\{x_n\}$ es infinitamente grande, pero de ningún modo significa que tiene límite.

Toda sucesión infinita es ilimitada (no acotada), puesto que fuera de cualquier entorno de cero existe un término de aquélla (incluso pueden ser varios términos, empezando por cierto número). Lo inverso no es cierto: una sucesión no acotada puede ser no infinita.

Teorema 3. *La suma algebraica de un número finito de sucesiones infinitésimas es una sucesión infinitésima.*

Teorema 4. *El producto de una sucesión infinitésima por una acotada es una sucesión infinitésima.*

COROLARIO. *El producto de un número finito de infinitésimos es un infinitésimo.*

Teorema 5. *Si una sucesión $\{x_n\}$ es infinita, entonces, empezando por cierto número n, queda definida la sucesión $\{1/x_n\}$ que es infinitésima. Si una sucesión $\{x_n\}$ es infinitésima y $\forall n\ x_n \neq 0$, entonces la sucesión $\{1/x_n\}$ resulta infinita.*

II. Preguntas y tareas de control

1. Enúnciense las definiciones: a) de una sucesión infinitésima; b) de una sucesión infinita. Dése la interpretación geométrica de estas definiciones.
2. Enúnciese en el lenguaje «ε — N» la negación de que una sucesión es a) infinitésima; b) infinita. Dése la interpretación geométrica de estas negaciones.
3. Dése la definición que corresponda a la notación simbólica $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.
4. Supongamos que una cantidad infinita de términos de una sucesión se encuentra: a) en todo entorno de cero; b) fuera de dicho entorno. ¿Se podrá deducir de la condición a) [de la condición b)] que la sucesión es infinitésima (o bien infinita), acotada o no acotada? ¿Se desprenderá de la condición a) [de la condición b)] que la sucesión no es infinitésima o bien infinita?
5. Se sabe que la sucesión $\{x_n\}$ es: a) infinitésima; b) infinita. ¿Se desprenderá de esto (a condición de que $x_n \neq 0\ \forall n$) que la sucesión $\{1/x_n\}$ es a) infinita; b) infinitésima?
6. a) ¿Será acotada una sucesión infinitésima?
   b) ¿Una sucesión infinita será no acotada o bien convergente?
   c) ¿Será infinita toda sucesión no acotada?
7. Se conoce que $y_n \neq 0\ \forall n$ y: a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$;
   b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. ¿Puede la sucesión $\{x_n/y_n\}$ ser

infinita o infinitésima, o bien convergente, o por último divergente, pero no infinita? Adúzcanse ejemplos.

8. Demuéstrese que la suma de dos sucesiones infinitésimas es una sucesión infinitésima. ¿Será cierta la afirmación análoga para las sucesiones infinitas? Arguméntese la respuesta.
9. Demuéstrese que si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, entonces, empezando por cierto número n, queda determinada la sucesión $\{1/x_n\}$, con la particularidad de que $\lim\limits_{n\to\infty} (1/x_n) = 0$.
10. Sea $\{x_n + y_n\}$ una sucesión infinitésima. ¿Se deduce de aquí que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son ambas sucesiones infinitésimas? Arguméntese la respuesta.
11. Sea $\{x_n y_n\}$ una sucesión infinitésima. ¿Se deduce de esto que por lo menos una de las sucesiones $\{x_n\}$ o $\{y_n\}$ es infinitésima? Arguméntese la respuesta.
12. Demuéstrese que si $x_n \geqslant y_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Enunciar en el lenguaje «ε — N» la negación de que una sucesión es infinita. Dar la interpretación geométrica de esta negación.

△ Según la definición de una sucesión infinita, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, si $\forall A > 0\ \exists N$ tal que $\forall n > N$: $|x_n| > A$. Aprovechando la regla para construir las negaciones, obtenemos: la sucesión $\{x_n\}$ no es infinita, si $\exists A > 0$ tal que $\forall N\ \exists n > N$: $|x_n| \leqslant A$. Desde el punto de vista geométrico esto significa que habrá cierto entorno de cero (entorno A), en el que se encontrará una cantidad infinitamente grande de términos de la sucesión. ▲

2. Demostrar que la sucesión $\{a^n\}$ es: a) infinita, cuando $|a| > 1$; b) infinitésima, cuando $|a| < 1$.

△ Sea $|a| > 1$. Demostremos que la sucesión $\{a^n\}$ satisface la definición de sucesión infinita, es decir, $\forall A > 0\ \exists N$ tal que $\forall n > N$ se cumple la desigualdad

$$|a|^n > A. \qquad (1)$$

Prefijemos un $A > 0$ arbitrario. Para encontrar el número N resolvemos la desigualdad (1) respecto a n. Obtenemos

$$n > \log_{|a|} A. \qquad (2)$$

Pongamos $N = [\log_{|a|} A]$. Entonces $\forall n > N$ se cumple la desigualdad (2), y por consiguiente, también la (1). De esta manera, $\forall A > 0$ $\exists N = [\log_{|a|} A]$ tal que $\forall n > N$: $|a|^n > A$. Precisamente esto se trataba de demostrar.

b) Sea ahora $|a| < 1$. Si $a = 0$, entonces $a^n = 0\ \forall n$ y, por consiguiente, $\{a^n\}$ es infinitésima. Sea $a \neq 0$. Entonces $a^n =$

$= ((1/a)^n)^{-1}$. Puesto que $|1/a| > 1$, la sucesión $\{(1/a)^n\}$ es infinita, mientras que la sucesión $((1/a)^n)^{-1}$ es infinitésima en virtud del teorema 5. Así, pues, la sucesión $\{a^n\}$ es infinitésima, cuando $|a| < 1$. ▲

3. Sea $x_n = n^{(-1)^n}$. Demostrar que la sucesión $\{x_n\}$: a) no está acotada; b) no es infinita.

△ a) Demostremos que $\{x_n\}$ satisface la definición de la sucesión no acotada. En efecto, $\forall M > 0$ el término de la sucesión con el número $n = 2([M] + 1)$ es igual a n y mayor que M. Según la definición esto significa precisamente que $\{x_n\}$ es la sucesión no acotada.

b) Demostremos que la sucesión $\{x_n\}$ no es infinita. En realidad, en el intervalo $(-2, 2)$ se encuentran, evidentemente, todos los términos de la sucesión con números impares y, por consiguiente, en este intervalo se halla una cantidad infinitamente grande de términos de la sucesión $\{x_n\}$. De aquí se deduce que $\{x_n\}$ no es infinita. ▲

4. Sean $\{x_n\}$ una sucesión convergente e $\{y_n\}$ otra infinita. Demostrar que la sucesión $\{x_n + y_n\}$ también es infinita.

△ Demostremos que la sucesión $\{x_n + y_n\}$ satisface la definición de sucesión infinita, es decir, $\forall A > 0\ \exists N$ tal que $\forall n > N$: $|x_n + y_n| > A$. Puesto que $\{x_n\}$ converge, resulta que está acotada, es decir, $\exists M > 0$ tal que $\forall n$ se cumple la desigualdad

$$|x_n| < M. \tag{3}$$

Prefijemos ahora un $A > 0$ arbitrario. Puesto que $\{y_n\}$ es infinita, para el número $A + M$ $\exists N$ tal que $\forall n > N$ tenemos

$$|y_n| > A + M. \tag{4}$$

De (3) y (4) obtenemos que $\forall n > N$ se cumple la desigualdad

$$|x_n + y_n| \geqslant |y_n| - |x_n| > A + M - M = A,$$

o que se trataba de demostrar. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

7. Se conoce que en cierto entorno de cero se encuentra: a) un número finito de términos de una sucesión; b) una cantidad infinita de términos de una sucesión. ¿Se puede deducir de aquí que en cada uno de estos casos la sucesión está acotada, o es infinitésima, o bien infinita?

8. Se conoce que la sucesión $\{x_n\}$ converge y la $\{y_n\}$ es infinita. ¿Puede la sucesión $\{x_n y_n\}$ a) convergir; b) divergir, pero ser acotada; c) ser infinita; d) ser infinitésima? Dense las respuestas a estas preguntas, recurriendo como ejemplos a las sucesiones $\{n\}$, $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$.

9. Cítense ejemplos de dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ para las cuales $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ y su producto $\{x_n y_n\}$ es una sucesión; a) convergente; b) divergente, pero acotada; c) infinitésima; d) infinita.

10. Demuéstrese que son infinitésimas las siguientes sucesiones: a) $x_n = n^k$ $(k < 0)$: b) $x_n = (-1)^n \cdot 0{,}999^n$; c) $x_n = \frac{1}{n!}$; d) $x_n = \frac{n}{2n^3+1}$.

11. Demuéstrese que las siguientes sucesiones son infinitas: a) $x_n = n^k$ $(k > 0)$; b) $x_n = n(-1)^n$; c) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$; d) $x_n = \log_2(\log_2 n)$ $(n \geqslant 2)$.

12. Demuéstrese que cualquier sucesión infinita no está acotada.

13. Demuéstrese que la sucesión $\{(1 + (-1)^n)\, n\}$ no está acotada, sin embargo no es infinita.

14. Demuéstrese que si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $(-\infty)$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ alcanza su cota inferior (superior) exacta.

15. Hállese el término mínimo de la sucesión $\{x_n\}$, si: a) $x_n = n^2 - 9n - 100$; b) $x_n = n + \frac{100}{n}$.

§ 3. Propiedades de las sucesiones convergentes

1. Conceptos y teoremas fundamentales

Teorema 6. *Sea* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Entonces:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$;

c) *si* $b \neq 0$, *en tal caso, empezando por cierto número, queda definida la sucesión* $\{x_n/y_n\}$ *(es decir,* $\exists N$ *tal que* $\forall n \geqslant N$: $y_n \neq 0$) *y* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n) = a/b$.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n)$ se llama *indeterminación de forma* 0/0. De manera análoga se definen las indeterminaciones de las formas ∞/∞, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$. Está claro que para tales cotas el teorema 6 es inaplicable.

Teorema 7. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *y empezando por cierto número* $x_n \geqslant b$ $(x_n \leqslant b)$, *entonces* $a \geqslant b$ $(a \leqslant b)$.

Teorema 8 (TEOREMA DE TRES SUCESIONES). *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ *y empezando por cierto número, se cumplen las desigualdades* $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

II. Preguntas y tareas de control

1. Dése la definición de sucesión convergente.
2. Enúnciese en el lenguaje «ε — N» la definición de sucesión divergente y dése la interpretación geométrica de esta definición.
3. Enúnciense los teoremas 6—8.
4. Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ converge, mientras que la $\{y_n\}$ diverge. Demuéstrese que $\{x_n+y_n\}$ diverge, $\{cx_n\}$ converge, $\{cy_n\}$ diverge, cuando $c \neq 0$. Muéstrese aduciendo ejemplos que la sucesión $\{x_n y_n\}$ puede: a) convergir; b) divergir.
5. Supongamos que la sucesión $\{x_n + y_n\}$ converge. ¿Se puede deducir de esto que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergen?
6. Sea
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a. \quad (*)$$
Demuéstrese que x_n puede representarse en la forma
$$x_n = a + \alpha_n; \quad (**)$$
donde $\{\alpha_n\}$ es una sucesión infinitésima. Demuéstrese lo inverso: a partir de (**) se deduce (*).
7. Demuéstrese el teorema 6.
8. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, además $\forall n\ x_n > b$. ¿Se desprenderá de esto que:
a) $a > b$; b) $a \geqslant b$?

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$ y la sucesión $\{z_n\}$ diverge. Demostrar que $\{z_n y_n\}$ también diverge.

△ Designemos $x_n = z_n y_n$. Demostremos la divergencia de la sucesión $\{x_n\}$, aplicando el método de reducción al absurdo. Supongamos que $\{x_n\}$ converge. Puesto que según el planteamiento $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, según el teorema 6 la sucesión $\{x_n/y_n\} = \{z_n\}$ queda definida, empezando por cierto número, y converge. Pero esto contradice al planteamiento. Por consiguiente, $\{x_n\}$ diverge. ▲

2. Demostrar que la sucesión $\{\operatorname{sen} n\}$ diverge.

△ Demostrémoslo, aplicando el método de reducción al absurdo. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen} n = a$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}(n+2) = a$, de donde
$$\lim_{n\to\infty} (\operatorname{sen}(n+2) - \operatorname{sen} n) = 0. \quad (1)$$
Puesto que $\operatorname{sen}(n+2) - \operatorname{sen} n = 2 \operatorname{sen} 1 \cos(n+1)$, tomando en consideración (1), obtenemos
$$\lim_{n\to\infty} \cos(n+1) = 0. \quad (2)$$

De la igualdad $\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \operatorname{sen} n \operatorname{sen} 1$ encontramos $\operatorname{sen} n = \frac{1}{\operatorname{sen} 1}(\cos n \cos 1 - \cos(n+1))$. De aquí, en virtud de (2), se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen} n = 0$. De esta manera obtenemos $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen} n = 0$, lo que contradice a la igualdad $\cos^2 n + \operatorname{sen}^2 n = 1$. Por consiguiente, $\{\operatorname{sen} n\}$ diverge. ▲

3. Hallar los límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10n}{n^2+1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$.

△ Advirtamos que cada uno de estos límites es una indeterminación de forma ∞/∞. Tenemos:

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{10n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+\frac{1}{n}} = 0,$$

ya que $\left\{n+\frac{1}{n}\right\}$ es infinitamente grande;

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-\sqrt{n})(n+\sqrt{n})}{n-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}(n+\sqrt{n}) = +\infty$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 3^n}{3^n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{1-\frac{2}{3^n}} = 5\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{3^n}\right)} = 5.$$ ▲

4. Encontrar el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-n)$.

△ Cabe advertir que este límite es una indeterminación de forma $\infty - \infty$. Tenemos

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)+1} = \frac{1}{2}.$$ ▲

5. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$.

△ La sucesión $\{\cos n\}$ está acotada, mientras que la $\left\{\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right\}$ es infinitésima, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 0.$$

De aquí según el teorema 4 se deduce, que el producto de estas sucesiones es infinitésima, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1} = 0$. ▲

6. Hallar el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4}{n^5}$.

$\triangle$ Designemos $S_n = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$. Busquemos S_n en forma de

$$S_n = An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En + F.$$

Entonces

$$S_{n+1} - S_n = A[(n+1)^5 - n^5] + B[(n+1)^4 - n^4] + \\ + C[(n+1)^3 - n^3] + D[(n+1)^2 - n^2] + E[(n+1) - n].$$

De aquí para cualquier n natural tenemos

$$(n+1)^4 = 5An^4 + (10A + 4B)n^3 + (10A + 6B + 3C)n^2 + \\ + (5A + 4B + 3C + 2D)n + A + B + C + D + E.$$

Igualando los coeficientes en las expresiones con potencias iguales de n en los miembros primero y segundo de la igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} 5A \qquad\qquad\qquad &= 1, \\ 10A + 4B \qquad\qquad &= 4, \\ 10A + 6B + 3C \qquad &= 6, \\ 5A + 4B + 3C + 2D &= 4, \\ A + B + C + D + E &= 1. \end{aligned}$$

De aquí $A = 1/5$, $A = 1/2$, $C = 1/3$, $D = 0$, $E = -1/30$. De esta manera, para todo n tenemos $S_n = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n + F$. Poniendo $n = 1$, odtendremos $1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{30} + F$, de donde $F = 0$. Por consiguiente,

$$S_n = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}.$$

Así pues,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4}{n^5} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{30n^4}\right) = \frac{1}{5}. \quad \blacktriangle$$

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

16. a) Se conoce que la sucesión $\{x_n\}$ converge, mientras que $\{y_n\}$ diverge. ¿Podrá ser la sucesión $\{x_n y_n\}$ convergente o bien divergente?

b) Es sabido que las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ divergen. ¿Podrán las sucesiones $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ ser convergentes o bien divergentes?

Dense las respuestas a estas preguntas, aprovechando a título de ejemplos las sucesiones $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$, $\{(-1)^n\}$, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\{n\}$, $\{-n\}$, $\{[-1)^{n+1}\}$.

17. Vienen dadas las sucesiones $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$, $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n+100}\right\}$. Elíjanse entre estas sucesiones infinitésimas aquellas en las que:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n)=0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n)=1$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n)=\infty$; d) $\{x_n/y_n\}$ diverge, pero está acotada.

18. Se da: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b\neq\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$. Demuéstrese que:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n)=0$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n/x_n)=\infty$ $(x_n\neq 0)$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)=\infty$, si $b\neq 0$.

19. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n)=\infty$, si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b\neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$ $(y_n\neq 0)$.

20. Investíguese la convergencia de las sucesiones (en función de α, β, γ):

a) $x_n=\frac{n^\alpha+1}{n^\beta+3}$; b) $x_n=n^\gamma\,\frac{\sqrt[3]{n^3+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

21. Hallense los límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\operatorname{sen}(n!)}{n+2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

22. Sea $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$. Hay que calcular $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Estimemos x_n superior e inferiormente:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2}}=1.$$

De esta manera tenemos $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<x_n<1$.

Puesto que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,$$

según el teorema de tres sucesiones obtenemos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

Por otra parte, un término arbitrario en la expesión para x_n es igual a $\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots$$
$$\ldots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=0+0+\ldots+0=0.$$

Así, pues hemos obtenido que $1 = 0$. Encuéntrese el error en los razonamientos aducidos. ¿Cuál de los dos resultados es cierto y cuál es erróneo y por qué?

23. Calcúlense los límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

§ 4. Ejemplos singulares

1. Conceptos y fórmulas fundamentales

Diremos que la sucesión infinita $\{x_n\}$ tiene un *orden superior de crecimiento* que la sucesión infinita $\{y_n\}$, si $\{x_n/y_n\}$ es infinitamente grande; además aprovecharemos la designación $y_n \ll x_n$. Este párrafo se dedica a los cálculos de algunos límites, con los cuales se pueden comparar los órdenes de crecimiento de distintas sucesiones infinitas. El hallazgo de semejantes límites se basa en el empleo del teorema 8 de tres sucesiones y de la fórmula del binomio de Newton:

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots$$
$$\ldots+b^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^ka^{n-k}b^k,$$

donde

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!},\quad 0!=1.$$

De esta fórmula se obtiene la desigualdad

$$(a+b)^n>\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2, \qquad (1)$$

que es válida para a y b positivos y cualquier número natural n.

Los ejemplos y los problemas que examinaremos en el este párrafo conducen a los siguientes resultados:

$$\log_{|a|} n \ll n^{\alpha} \ll a^n \ll n! \text{ para } \alpha > 0, \ |a| > 1. \qquad (2)$$

(La correlación $\log_{|a|} n \ll n^{\alpha}$ es válida para $\alpha > 0$, pero en los ejers. 24 y 25 se propone demostrarla sólo para $\alpha \geqslant 1$.)

II. Preguntas y tareas de control

1. Enúnciese el teorema de tres sucesiones.
2. Escríbanse los primeros cuatro términos de la fórmula del binomio de Newton para el desarrollo $(1+a)^n$.
3. Se dan las siguientes sucesiones infinitas: $\{n!\}$, $\{\log_{10} n\}$, $\{\sqrt[3]{n}\}$, $\{4^n\}$, $\{n^5\}$.

   Recurriendo a las correlaciones (2), indíquese para cada dos de estas sucesiones cuál de ellas tiene orden superior de crecimiento.

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{a^n} = 0$, cuando $\alpha > 0$, $|a| > 1$.

△ De la definición dada para el límite de una sucesión se deduce que, si $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$, también $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Por eso es suficiente demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$, donde $w_n = \frac{n^{\alpha}}{|a|^n}$. Representemos w_n en forma de

$$w_n = \left(\frac{n}{(|a|^{1/\alpha})^n} \right)^{\alpha}.$$

Examinemos la sucesión $z_n = \frac{n}{(|a|^{1/\alpha})^n}$ y demostremos que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. Entonces partiendo del resultado del ejemplo 5 en § 1 se deducirá que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$. Puesto que $\alpha > 0$, $|a| > 1$, obtenemos que $\exists \beta > 0$ tal que $|a|^{1/\alpha} = 1 + \beta$. Aplicando la desigualdad (1) al binomio $(1+\beta)^n$ obtendremos

$$(|a|^{1/\alpha})^n = (1+\beta)^n > \frac{n(n-1)}{2} \beta^2 \ \forall n \geqslant 2.$$

De aquí se desprende que

$$z_n = \frac{n}{|a|^{n/\alpha}} < \frac{2}{\beta^2 (n-1)} \ \forall n \geqslant 2.$$

Pongamos $x_n = 0 \ \forall n$ e $y_n = \frac{2}{\beta^2 (n-1)}$ $\forall n \geqslant 2$. Las sucesiones $\{x_n\}$, $\{z_n\}$, $\{y_n\}$ satisfacen las condiciones del teorema de tres sucesio-

nes, puesto que $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, lo que se trataba de demostrar.

De esta manera se puede escribir

$$n^\alpha \ll a^n, \text{ cuando } \alpha > 0, \ |a| > 1. \ \blacktriangle$$

2. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, siendo $|a| > 1$.

$\triangle$ Examinemos la sucesión $z_n = \frac{|a|^n}{n!}$ y demostremos que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. Sea k un número natural tal que $k \geqslant |a|$ y sea $n > 2k$. Representemos z_n en forma del producto de n factores:

$$\frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|}{1}\,\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{2k}\,\frac{|a|}{2k+1}\cdots\frac{|a|}{n}.$$

Puesto que $k \geqslant |a|$, la fracción $\frac{|a|}{2k}$ y todas las fracciones que la siguen, no son mayores que $1/2$. Por eso obtenemos la estimación

$$z_n = \frac{|a|^n}{n!} \leqslant |a|^{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k+1} = (2|a|)^{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Puesto que $z_n > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} (2|a|)^{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, según el teorema de tres sucesiones $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. De aquí se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, es decir, la sucesión $\{n!\}$ tiene un orden superior de crecimiento con respecto a la sucesión $\{a^n\}$, cuando $|a| > 1$. Así, pues, $a^n \ll n!$, cuando $|a| > 1$. $\blacktriangle$

3. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

$\triangle$ Cuando $n \geqslant 2$, el número $\sqrt[n]{n}$ es mayor que 1. Por eso $\forall n \geqslant 2\ \exists \beta_n > 0$ tal que

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \beta_n. \tag{3}$$

De la igualdad (3) se deduce que $n = (1 + \beta_n)^n$. Aplicando al segundo miembro de la última igualdad la desigualdad (1), obtenemos

$$n = (1+\beta_n)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2}\beta_n^2.$$

De aquí encontramos que $\beta_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}}\ \forall n \geqslant 2$. De las desigualdades $0 < \beta_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ y de la correlación $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$ según el teorema de tres sucesiones se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. De la igualdad (3) ahora tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. $\blacktriangle$

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

24. Utilizando la definición del límite de una sucesión y el resultado del ejemplo 3, demuéstrese que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$, cuando $a > 1$.

25. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0$, cuando $a > 1$, $\alpha > 1$.

26. Demuéstrese que las sucesiones dadas son infinitésimas: a) $x_n = \frac{n}{2^n}$; b) $x_n = \frac{3^n}{n!}$; c) $x_n = \sqrt[n]{5} - 1$.

27. Aprovechando el resultado del ejemplo 2, demuéstrese que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

§ 5. Sucesiones monótonas

I. Conceptos y teoremas fundamentales

La sucesión $\{x_n\}$ se llama *no creciente* (*no decreciente*), si $\forall n\ x_{n+1} \leqslant x_n$ $(x_{n+1} \geqslant x_n)$.

Las sucesiones no crecientes y no decrecientes se llaman sucesiones *monótonas*.

La sucesión $\{x_n\}$ se llama *creciente* (*decreciente*), si $\forall n\ x_{n+1} > x_n$ $(x_{n+1} < x_n)$.

Las sucesiones crecientes y decrecientes se llaman también *estrictamente monótonas*.

Cabe señalar que la sucesión monótona siempre está acotada al menos por un lado: la sucesión no creciente está acotada superiormente y la no decreciente, inferiormente por su primer término. En caso de que la sucesión monótona esté acotada por ambos lados, ésta converge, es decir, tiene lugar el teorema siguiente.

Teorema 9. *Una sucesión monótona acotada converge.*

II. Preguntas y tareas de control

1. Enúnciense: a) la definición de sucesión monótona; b) el criterio de convergencia de la sucesión monótona.
2. ¿Será el acotamiento de una sucesión la condición necesaria y suficiente para la convergencia: a) de una sucesión monótona; b) de una sucesión arbitraria?

III. Ejemplo de resolución de un problema

Hallar el límite de una sucesión $\{x_n\}$ que se determina por la relación recurrente:

x_1 es un número arbitrario que satisface la desigualdad $0 < x_1 < 1$;

$$x_{n+1} = x_n (2 - x_n)\ \forall n \geqslant 1. \qquad (1)$$

△ Demostremos al principio que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada, a saber: valiéndonos del método de inducción matemática, demostremos que $\forall n$ son válidas las desigualdades

$$0 < x_n < 1. \qquad (2)$$

Para x_1 las desigualdades (2) se cumplen según el planteamiento. Supongamos que las desigualdades (2) tienen lugar para el número n y demostremos que entonces serán válidas para el número $n+1$. Escribamos la expresión (1) en forma de

$$x_{n+1} = 1 - (1 - x_n)^2.$$

De las desigualdades (2) se deduce que $0 < (1 - x_n)^2 < 1$, por eso $0 < x_{n+1} < 1$. Con esto quedan demostradas $\forall n$ las desigualdades (2).

Demostremos ahora que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente. Puesto que $x_n < 1$, resulta que $2 - x_n > 1$. Al dividir la igualdad (1) por x_n, obtendremos

$$x_{n+1}/x_n = 2 - x_n > 1.$$

De aquí se deduce que $x_{n+1} > x_n$ $\forall n$. Así, pues, la sucesión $\{x_n\}$ es monótona y acotada. Por consiguiente, según el teorema 9 existe cierto $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, que designaremos con a. Para encontrar a pasemos al límite en la fórmula recurrente (1). Obtendremos

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} (2 - x_n), \text{ o } a = a(2-a).$$

De aquí $a = 0$ ó $a = 1$; puesto que $x_1 > 0$ y la sucesión $\{x_n\}$ es creciente, $a = 1$. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

28. Demuéstrese la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$, donde $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

29. Demuéstrese la convergencia y calcúlese el límite de la sucesión $\{x_n\}$, si $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$, ..., $x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}$ (en total n raíces), ..., donde $a > 0$.

30. Demuéstrese la convergencia y calcúlese el límite de una sucesión $\{x_n\}$, si ésta se determina por la relación recurrente:

a) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $a \neq b$, $x_n = (x_{n-1} + x_{n-2})/2$ $\forall n \geqslant 3$;

b) x_1 es un número arbitrario positivo,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \ \forall n \geqslant 1, \ a > 0;$$

c) x_1 es un número arbitrario negativo,

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right) \ \forall n\geqslant 1,\ a>0.$$

31. Demuéstrese que la sucesión monótona no acotada es infinita.

32. Demuéstrese la existencia del límite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

§ 6. Puntos límites

I. Conceptos y teoremas fundamentales

Sea $\{x_n\}$ cierta sucesión numérica. Examinemos una sucesión arbitraria creciente de enteros positivos $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$. Señalemos que $k_n \geqslant n$. Elijamos de $\{x_n\}$ los términos con números $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$:

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n} \ldots$$

La sucesión numérica obtenida $\{x_{k_n}\}$ se llama *subsucesión* de la sucesión $\{x_n\}$.

Teorema 10. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *toda subsucesión* $\{x_{kn}\}$ *converge hacia* a, *cuando* $n\to\infty$.

Teorema 11 (TEOREMA DE BOLZANO–WEIERSTRASS). *De toda sucesión acotada se puede extraer una subsucesión convergente.*

DEFINICIÓN 1. *El número* a *se llama* ***punto límite*** *(o* ***límite parcial****) de la sucesión* $\{x_n\}$, *si de la sucesión* $\{x_n\}$ *se puede extraer la subsucesión* $\{x_{k_n}\}$ *que converge hacia* a.

Se puede dar otra definición equivalente del punto límite.

DEFINICIÓN 2. *El número* a *se* ***llama punto límite*** *de la sucesión* $\{x_n\}$, *si todo entorno* ε *del punto* a *contiene una cantidad infinitamente grande de términos de la sucesión* $\{x_n\}$.

OBSERVACIÓN 1. Del teorema 10 se deduce que una sucesión convergente tiene sólo un punto límite que coincide con su límite.

OBSERVACIÓN 2. Del teorema 11 se desprende que toda sucesión acotada tiene por lo menos un punto límite.

El punto límite máximo (mínimo) de la sucesión $\{x_n\}$ acotada superiormente (inferiormente) se llama *límite superior* (*inferior*) de esta sucesión y se designa con $\overline{\lim\limits_{n\to 8}}\, x_n \left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n\right)$.

Es evidente que si $\{x_n\}$ converge, entonces $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Si la sucesión $\{x_n\}$ no está acotada superiormente (inferiormente), se supone que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty \left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty\right)$.

II. Preguntas y tareas de control

1. Enúnciense las definiciones: 1) de la sucesión; b) del punto límite (dense dos definiciones y demuéstrese su equivalencia); c) del límite superior (inferior) de la sucesión.
2. Dése la interpretación geométrica de la definición del punto límite.
3. ¿El límite de una sucesión será su punto límite? Arguméntese la respuesta.
4. Se dan las sucesiones: $\{n((-1)^n + 1)\}$, $\{n\}$, $\{(-1)^n + 1\}$. Indíquese, cuál de éstas: a) tiene punto límite; b) no tiene punto límite; c) tiene dos puntos límites; d) tiene sólo un punto límite. ¿Habrá entre estas sucesiones alguna convergente?
5. Demuéstrese que una sucesión convergente tiene sólo un punto límite que coincide con su límite. ¿Será cierta la afirmación inversa: «Si la sucesión tiene sólo un punto límite, entonces ésta converge»?
6. Se da una sucesión $\{x_n\}$. Se conoce que cualquier entorno del punto a contiene una cantidad infinitamente grande de términos de la sucesión y ningún segmento, al que no pertenece el punto a, no contiene dicha cantidad de términos de la sucesión. ¿Se deduce de aquí que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?
7. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 4$. ¿Será la sucesión $\{x_n\}$: a) convergente (si la respuesta es afirmativa, a qué será igual su límite); b) divergente?
8. Enúnciese el teorema de Bolzano — Weierstrass.
9. ¿Será cierta la afirmación: «Si una sucesión no está acotada, de ella se puede extraer una subsucesión convergente»?

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Demostrar la divergencia de la sucesión $x_n = (-1)^n$.

△ Examinemos dos subsucesiones de esta sucesión $x_{2k} = 1$ y $x_{2k-1} = -1$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Es evidente que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = -1$.

De esta manera la sucesión $\{(-1)^n\}$ tiene dos puntos límites: 1 y —1 y por eso no puede ser convergente, puesto que la sucesión convergente tiene sólo un punto límite. ▲

2. Hallar: a) todos los puntos límites de la sucesión $\{\operatorname{sen} n^\circ\}$; b) los límites superior e inferior de esta sucesión.

△ a) Cada uno de los números 0, $\pm\operatorname{sen} 1^\circ$, $\pm\operatorname{sen} 2^\circ, \ldots$, $\ldots, \pm\operatorname{sen} 89^\circ$, ± 1 se encuentra en la sucesión una cantidad infinitamente grande de veces, puesto que $\forall n,\ p \in \mathbb{N}$ $\operatorname{sen} n^\circ = \operatorname{sen}(360^\circ p + n^\circ)$. Por eso cada número indicado es el punto límite de la sucesión $\{\operatorname{sen} n^\circ\}$. La sucesión no tiene otros puntos límites, ya que, si el número a no coincide con ninguno de estos 181 números, existe un entorno del punto a que no contiene término alguno de la sucesión.

b) De entre los 181 puntos límites indicados en el p. a) el mínimo es -1 y el máximo, 1, es decir, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$ sen $n^\circ = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}$ sen $n^\circ = -1$. ▲

3. Encontrar: a) todos los puntos límites de la sucesión 0, 1, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1/6, . . .; b) los límites superior e inferior de esta sucesión.

△ a) La sucesión dada $\{x_n\}$ es el conjunto de todos los números racionales del segmento [0, 1], dispuestos en el orden indicado. Puesto que todo entorno ε de cualquier número real en el segmento [0, 1] contiene una cantidad infinitamente grande de números racionales (véase el ejer. 5 en el cap. 1), cada punto de este segmento es el punto límite de la sucesión dada. Pero si el punto $a \notin [0, 1]$, aquél no será el punto límite de la sucesión dada, puesto que para semejante punto existe un entorno que no contiene ningún término de la sucesión.

b) Es evidente que $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1$. ▲

4. Demostrar que la sucesión infinita $\{x_n\}$ no tiene punto límite.

△ Hagamos la demostración, aplicando el método de reducción al absurdo. Supongamos que cierto punto a es un punto límite de la sucesión $\{x_n\}$. Entonces existe una subsucesión $\{x_{k_n}\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = a$. Por otra parte $\{x_{k_n}\}$ no tiene límite, puesto que es infinita. En efecto, ya que $\{x_n\}$ es infinita, $\forall A > 0\ \exists N$: $\forall n > N\ |x_n| > A$. De aquí, por cuanto que $k_n \geqslant n$ y $k_{n+1} > k_n$, se deduce que $\forall k_n > N$: $|x_{k_n}| > A$, es decir, $\{x_{k_n}\}$ es infinita. La contradicción obtenida demuestra que $\{x_n\}$ no tiene punto límite. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

33. Demuéstrese que:

a) de toda sucesión no acotada se puede extraer una subsucesión infinita;

b) toda subsucesión de una sucesión infinita también es infinita;

c) una sucesión monótona no acotada no tiene punto límite;

d) en cada sucesión acotada existen los límites superior e inferior.

34. Se conoce que las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tienen cada una un punto límite. Muéstrese aduciendo ejemplos que las sucesiones $\{x_n + y_n\}$ y $\{x_n \cdot y_n\}$ pueden: no tener puntos límites; tener un punto límite; tener dos puntos límites.

35. Hállense todos los puntos límites de la sucesión $\{x_n\}$, así como $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, si:

a) $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$; b) $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{\pi n}{2}$;

c) $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{n(n-1)/2}$; d) $x_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3}$;

e) $x_n = 1 + n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{2}$; f) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$;
g) $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \operatorname{sen} \frac{\pi n}{4}$; h) $x_n = \frac{n}{n+1} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi n}{4}$;
i) $x_n = \sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$; h) $x_n = \cos^n \frac{2\pi n}{3}$;
l) $x_n = (-1)^n n$.

36. Investíguese la convergencia de la sucesión

$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n}{n}.$$

§ 7. Sucesiones fundamentales. Criterio de Cauchy de convergencia de una sucesión

I. Conceptos y teoremas fundamentales

DEFINICIÓN 1. *Una sucesión $\{x_n\}$ se llama **fundamental**, si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ tal que $\forall n > N$ y $\forall$ número natural p se cumple la desigualdad $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$.*

Esta definición es equivalente a la siguiente.

DEFINICION 2. *Una sucesión $\{x_n\}$ se llama **fundamental**, si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ tal que $\forall n > N$ y $\forall m > N$ se cumple la desigualdad $|x_n - x_m| < \varepsilon$.*

La interpretación geométrica de estas definiciones consiste en lo siguiente: si una sucesión $\{x_n\}$ es fundamental, entonces $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ tal que la distancia entre dos términos cualesquiera de la sucesión con números mayores que N, es menor de ε.

Teorema 12 (CRITERIO DE CAUCHY DE CONVERGENCIA DE UNA SUCESIÓN). *Para que una sucesión converja, es necesario y suficiente que ésta sea fundamental.*

II. Preguntas y tareas de control

1. Enúnciense las definiciones:
   a) de sucesión fundamental (dense las dos definiciones y demuéstrese su equivalencia);
   b) de sucesión no fundamental (utilizando la regla de construcción de las negaciones).
   Dése la interpretación geométrica de estas definiciones.
2. Enúnciese el criterio de Cauchy de convergencia de una sucesión.

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Valiéndose del criterio de Cauchy, demostrar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$, donde $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} k}{k^2}$.

△ En virtud del criterio de Cauchy es suficiente demostrar que la sucesión $\{x_n\}$ es fundamental. Para esto estimemos $|x_n -$

$- x_{n+p}|$. Tenemos

$$|x_n - x_{n+p}| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\operatorname{sen} k}{k^2}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2}.$$

Puesto que $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, obtenemos

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$< \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Por eso, $\forall n,\ p \in N$ tenemos

$$|x_n - x_{n+p}| < 1/n. \tag{1}$$

Prefijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario y pongamos $N = [1/\varepsilon]$. Entonces $\forall n > N$ se cumple la desigualdad $n \geqslant [1/\varepsilon] + 1 > 1/\varepsilon$, de donde $1/n < \varepsilon$. Por consiguiente, $\forall n > N$ y $\forall$ número natural p, haciendo uso de la desigualdad (1), obtenemos $|x_n - x_{n+p}| < 1/n < \varepsilon$. Esto demuestra el carácter fundamental de la sucesión $\{x_n\}$. ▲

2. Utilizando el criterio de Cauchy, demostrar la divergencia de la sucesión $\{x_n\}$, donde $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

△En virtud del criterio de Cauchy es suficiente demostrar que la sucesión $\{x_n\}$ no es fundamental. Para esto estimemos $|x_n - x_{n+p}|$. Tenemos

$$|x_n - x_{n+p}| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{p}{\sqrt{n+p}} \quad \forall n,\ p \in \mathbf{N}.$$

En particular, para $p = n$ obtenemos

$$|x_n - x_{2n}| \geqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \forall n. \tag{2}$$

Tomemos $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$. Entonces $\forall N\ \exists$ tales $n > N$ y el número natural p, que $|x_n - x_{n+p}| \geqslant \varepsilon$. En efecto, en virtud de la desigualdad (2) es suficiente tomar cualquier $n > N$ y $p = n$. Esto demuestra que la sucesión $\{x_n\}$ no es fundamental. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

37. Empleando el criterio de Cauchy, demuéstrese la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$, si:

a) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$; b) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}$; c) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} k}{2^k}$;

d) $x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k q^k$, donde $|q| < 1$ y $|a_k| \leqslant M$ $\forall k$, $M > 0$.

38. Aprovechando el criterio de Cauchy, demuéstrese que si la sucesión $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

39. Recurriendo al criterio de Cauchy, demuéstrese la divergencia de la sucesión $\{x_n\}$, si:

a) $x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$; b) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Capítulo III
Límite de una función. Continuidad de una función

§ 1. Límite de una función. Teoremas sobre los límites. Funciones infinitas

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Límite de función en un punto. Sea x una magnitud numérica variable y X, el campo de su variación. Si a cada número $x \in X$ está puesto en correspondencia cierto número y, se dice que en el conjunto X queda definida *una función* y se escribe $y = f(x)$. La magnitud x se llama *variable independiente* (o *argumento de la función*), el conjunto X, *el campo de definición o de existencia de la función* $f(x)$ y el número y que corresponde al valor dado de argumento x, *valor particular de la función en el punto* x. La reunión Y de todos los valores particulares de función se llama *conjunto de valores de la función* $f(x)$.

El punto a ($a \in X$ o $a \notin X$) se llama *punto límite* del conjunto X, si todo entorno del punto a contiene puntos del conjunto X distintos de a.

En las definiciones de este párrafo se supone que a es el punto límite del conjunto X, o sea, del campo de definición de la función $f(x)$.

DEFINICIÓN 1 (SEGÚN CAUCHY). *El número b se llama* ***límite de la función*** *$f(x)$* ***en el punto*** *a (cuando $x \to a$), si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x$, que satisfaga las condiciones de $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta$, se cumple la desigualdad $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

DEFINICIÓN 2 (SEGÚN HEINE). *El número b se llama* ***límite de la función*** *$f(x)$* ***en el punto*** *a, si para toda sucesión $\{x_n\}$ convergente hacia a, tal que $x_n \in X$, $x_n \neq a$, la correspondiente sucesión de valores de la función $\{f(x_n)\}$ converge hacia b.*

La notación es: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ o $f(x) \to b$ cuando $x \to a$.

Subrayemos que el concepto de límite de una función en el punto a se introduce sólo para los puntos límites a del campo de definición de aquélla. Cabe señalar además, que la función puede no estar determinada en el punto a, o sea, hablando en general, $a \notin X$.

Enunciemos las negaciones de las definiciones 1 y 2.

NEGACIÓN DE LA DEFINICIÓN 1. El número b no es el límite de la función $f(x)$ en el punto a $[b \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)]$, si $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ $\exists x \in X$, para el cual $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - b| \geqslant \varepsilon$.

NEGACIÓN DE LA DEFINICIÓN 2. El número $b \neq \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, si existe la sucesión $\{x_n\}$ $(x_n \in X,\ x_n \neq a)$ convergente hacia a tal que la sucesión correspondiente $\{f(x_n)\}$ no converge hacia b.

2. Teoremas sobre los límites

Teorema 1. *Las definiciones 1 y 2 del límite de la función son equivalentes.*

Teorema 2. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ definidas en cierto entorno del punto a, a la posible excepción del propio punto a, y $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$,*

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$. Entonces:

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = b + c;$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = b - c;$$

$$\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = bc;$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}, \text{ siempre que } c \neq 0.$$

Teorema 3. *Supongamos que las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ están definidas en cierto entorno del punto a, a la posible excepción del propio punto a, y satisfacen las desigualdades $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. Sea $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = b$. Entonces $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$.*

3. Límites unilaterales

DEFINICIÓN 1 (SEGÚN CAUCHY). *El número b se llama* ***límite a la derecha (a la izquierda)*** *de la función $f(x)$ en el punto a, si $\forall \varepsilon > 0$*

$\exists\delta > 0$ tal que $\forall x$, que satisfaga las condiciones de $x \in X$, $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$), se cumple la desigualdad $|f(x) - b| < \varepsilon$.

DEFINICIÓN 2 (SEGÚN HEINE). *El número b se llama **límite a la derecha (a la izquierda)** de la función $f(x)$ en el punto a, si para toda sucesión $\{x_n\}$ convergente hacia a, tal que $x_n \in X$, $x_n > a$ ($x_n < a$), la correspondiente sucesión de valores de la función $\{f(x_n)\}$ converge hacia b.*

Las notaciones son: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$ o $f(a + 0) = b$ (respectivamente $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$ o $f(a - 0) = b$).

Las definiciones 1 y 2 son equivalentes.

Teorema 4. *Si existen $f(a + 0)$ y $f(a - 0)$, con la particularidad de que $f(a + 0) = f(a - 0) = b$, entonces existe también el $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.*

Teorema 5. *Si la función $f(x)$ está determinada en cierto entorno del punto a, a la posible excepción del propio punto a, y existe el $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, también existen $f(a + 0)$ y $f(a - 0)$, siendo además $f(a + 0) = f(a - 0) = b$.*

4. Límite de una función, cuando $x \to \infty$. Supongamos que la función $f(x)$ está determinada en una semirrecta $(c, +\infty)$.

DEFINICIÓN 1 (SEGÚN CAUCHY). *El número b se llama **límite de la función $f(x)$ cuando** $x \to +\infty$ $[b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)]$, si $\forall\varepsilon > 0$ $\exists A > 0$ $(A \geqslant c)$ tal que $\forall x > A$ se cumple la desigualdad $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

DEFINICION 2 (SEGÚN HEINE). *El número $b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, si para toda sucesión infinita $\{x_n\}$ $(x_n > c)$ la correspondiente sucesión de valores de la función $\{f(x_n)\}$ converge hacia b.*

Las definiciones 1 y 2 son equivalentes.

De manera análoga se define $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, entonces se escribe $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$. Por ejemplo, $\lim\limits_{x \to \infty} (1/x) = 0$.

Para los límites unilaterales (o simplemente laterales) y los límites cuando $x \to \infty$, es válida el teorema análogo al teorema 2.

5. Funciones infinitas

DEFINICIÓN 1. *La función $f(x)$ se llama **infinita (infinitamente grande) en el punto a por la derecha**, si $\forall M > 0$ $\exists\delta > 0$ tal que $\forall x$, que satisfaga la condición de $x \in X$, $a < x < a + \delta$, se cumple la desigualdad*

$$|f(x)| > M. \tag{1}$$

La notación es: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ o $f(a + 0) = \infty$. Subrayemos que esta inscripción significa sólo que $f(x)$ es infinitamente gran-

de en el punto a por la derecha, pero de ningún modo significa que $f(x)$ tiene en el punto a el límite a la derecha: es evidente que este límite no existe.

Si en la definición 1 en vez de la desigualdad (1) se cumple la desigualdad $f(x) > M$ ($f(x) < -M$), se dice que la función $f(x)$ es infinita de signo más (menos) en el punto a por la derecha y se escribe $\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty$ o $f(a+0) = +\infty$ (respectivamente $\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty$ o $f(a+0) = -\infty$).

En forma análoga se define la función infinita en el punto a por la izquierda.

Si la función es infinita en el punto a por la derecha y por la izquierda, se escribe $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Por ejemplo, $\lim_{x\to 0} (1/x) = \infty$.

DEFINICIÓN 2. *La función $f(x)$ se llama* ***infinita en el punto a por la derecha (izquierda)****, si para toda sucesión convergente hacia a $\{x_n\}$ tal que $x_n \in X$, $x_n > a$ ($x_n < a$), la correspondiente sucesión $\{f(x_n)\}$ es infinita.*

Las definiciones 1 y 2 son equivalentes.

Supongamos que la función $f(x)$ está definida en la semirrecta $(c, +\infty)$.

DEFINICIÓN 3. *La función $f(x)$ recibe el nombre* ***de infinita cuando*** $x \to +\infty$, *si* $\forall M > 0\ \exists A\ (A \geqslant c)$ *tal que* $\forall x > A$: $|f(x)| > M$.

DEFINICIÓN 4. *La función $f(x)$ se llama* ***infinita cuando*** $x \to +\infty$, *si para toda sucesión infinita $\{x_n\}$ ($x_n > c$) la sucesión correspondiente $\{f(x_n)\}$ es infinitamente grande.*

La notación es: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$.

Las definiciones 3 y 4 son equivalentes.

De manera análoga se introduce el concepto de función infinita cuando $x \to -\infty$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Si la función $f(x)$ es infinita, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, se escribe $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Por ejemplo, $\lim_{x\to\infty} x = \infty$.

II. Preguntas y tareas de control

1. Enúnciense las dos definiciones de límite de una función en un punto. ¿Qué significa la equivalencia de estas definiciones?
2. Utilizando la definición dada para el límite de una función según Heine, demuéstrese la unicidad de límite de la función en un punto.
3. Demuéstrese que $\forall x_0$ $\lim_{x\to x_0} x = x_0$, empleando la definición dada para el límite de una función: a) según Cauchy, b) según Heine.
4. Se da la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$. ¿Está definida o no la función $f(x)$ en el punto $x = 0$? ¿El punto $x = 0$ será el punto límite del

campo de definición de la función? ¿Existe o no $\lim_{x \to 0} f(x)$?

5. Enúnciense las negaciones de las dos definiciones dadas para el límite de una función en un punto.
6. Enúnciense los teoremas 2 y 3 sobre los límites de las funciones.
7. Enúnciense las dos definiciones para los límites unilaterales de las funciones y las negaciones de estas definiciones.
8. ¿Existen o no $f(3+0)$ y $f(3-0)$, si $f(x)=\frac{|3-x|}{3-x}$? ¿Existe o no $\lim_{x \to 3} f(x)$?
9. ¿Bajo qué condiciones, partiendo de la existencia de los límites laterales (límite de una función), se deduce la existencia del límite de una función (de los límites laterales)?
10. Enúnciense las dos definiciones del límite de una función, cuando $x \to +\infty$, y las negaciones de estas definiciones.
11. Demúestrese que la función $f(x) = x$ no tiene límite, cuando $x \to +\infty$.
12. Demuéstrese que $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$.
13. Enúnciense las definiciones según Heine y según Cauchy que corresponden a las notaciones simbólicas siguientes: a) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$; b) $f(a+0) = -\infty$; c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$; d) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$; e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
14. Demuéstrese que la función $f(x) = 1/(x-3)$ es infinita en el punto $x = 3$.

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Demostrar que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

△ Aprovechemos la desigualdad $|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|\ \forall x$. Prefijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario y hagamos $\delta = \varepsilon$. Entonces, si $|x| < \delta$, $|\operatorname{sen} x| \leqslant |x| < \delta = \varepsilon$. Precisamente esto significa (conforme a la definición del límite de una función según Cauchy), que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$. ▲

2. Calcular $\lim_{x \to 1} f(x)$, donde $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$.

△ Puesto que $\lim_{x \to 1} (x^2-1) = 0$ y $\lim_{x \to 1} (x-1) = 0$, obtenemos que este límite es una indeterminación de forma 0/0 y no podemos utilizar el teorema 2 del límite del cociente de dos funciones. Hagamos uso del hecho de que al analizar el límite de una función en el punto $x = 1$ su argumento no toma el valor igual a 1. Por eso $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x+1)$ ya que $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$, si $x \neq 1$. Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión arbitraria que con-

verge hacia 1 ($x_n \neq 1$); entonces $\lim\limits_{x\to\infty} (x_n + 1) = 2$. Esto significa (conforme a la definición del límite de una función según Heine) que $\lim\limits_{x\to 1} (x + 1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$. ▲

3. Calcular el límite $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$.

△ Este límite, lo mismo que en el ejemplo 2, es una indeterminación de forma 0/0. Sin embargo, a diferencia del ejemplo 2, aquí es imposible directamente dividir el numerador y el denominador de la fracción por $x - 1$. Por eso transformemos previamente la función, multiplicando el numerador y el denominador por $(\sqrt{3+x} + 2,)$ o sea, la expresión conjugada del numerador. Obtendremos

$$\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}.$$

Puesto que al analizar el límite dado el argumento x no toma el valor de $x = 1$, entonces, simplificando por $x - 1$, obtenemos

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{3+x}+2} = \frac{1}{4}. \quad ▲$$

4. Demostrar que la función de Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es un número irracional;} \\ 1, & \text{si } x \text{ es un número racional,} \end{cases}$$

no tiene límite en ninguno de los puntos.

△ Demostremos que en un punto arbitrario a la función $D(x)$ no satisface la definición del límite de una función según Heine. Para esto elijamos dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{x'_n\}$ que convergen hacia a y son tales, que $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} D(x'_n)$. Primero examinemos la sucesión $\{x_n\}$ de puntos racionales que converge hacia a. Para ella $D(x_n) = 1$ $\forall n$ y por eso $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n) = 1$. Ahora analicemos la sucesión $\{x'_n\}$ de puntos irracionales que converge hacia a. Para ella $D(x'_n) = 0$ $\forall n$ y por eso $\lim\limits_{n\to\infty} D(x'_n) = 0$. Así, pues, $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} D(x'_n)$. De aquí se deduce que no existe límite de la función $D(x)$ en el punto a. ▲

5. Examinemos el conjunto de todos los números irracionales del intervalo $(-1, 1)$. Designémoslo con I_r. Determinemos en el conjunto I_r la función $f(x)$: $f(x) = 1$, si $x \in I_r$. Demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, donde a es un punto arbitrario del segmento $[-1, 1]$ (racional o irracional).

△ Sea $a \in [-1, 1]$. El punto a es el punto límite del conjunto I_r (véase el ejer. 5 en el cap. I). Recurramos a la definición del lími-

te de una función según Heine. Sea $\{x_n\}$ una sucesión arbitraria de puntos del conjunto I_r que converge al punto a ($x_n \neq a$). Según el planteamiento $f(x_n) = 1$ $\forall x_n \in I_r$. Por eso $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$ y, por consiguiente, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$. ▲

6. Demostrar que la función sen x no tiene límite, cuando $x \to +\infty$.

△ Demostremos que esta función no satisface la definición según Heine del límite de una función cuando $x \to +\infty$. Para esto indiquemos tal sucesión infinita $\{x_n\}$ que la sucesión $\{\text{sen}\, x_n\}$ diverja. Hagamos $x_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y la sucesión $\{\text{sen}\, x_n\} = -1, 1, -1, 1, \ldots$ diverge. De aquí se deduce que la función sen x no tiene límite cuando $x \to +\infty$. ▲

7. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{para } x < 0, \\ \text{sen}\, x, & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

($f(x)$ no está definida cuando $x = 0$). ¿Existe o no $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

△ Calculemos en el punto $x = 0$ los límites laterales de la función $f(x)$, utilizando el teorema 5 para las funciones $y = \text{sen}\, x$ e $y = x$ en el punto $a = 0$:

$$f(a+0) = \lim_{x\to 0+0} \text{sen}\, x = \lim_{x\to 0} \text{sen}\, x = 0;$$

$$f(a-0) = \lim_{x\to 0-0} x = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

De aquí de acuerdo con el teorema 4 se deduce que existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y éste es igual a cero. ▲

8. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, donde $f(x) = \dfrac{100x^2+1}{x^2+100}$.

△ Este límite es una indeterminación del tipo ∞/∞, puesto que el numerador y el denominador son funciones infinitas cuando $x \to \infty$. Representemos $f(x)$ en la forma de

$$f(x) = \frac{100 + 1/x^2}{1 + 100/x^2} \quad (x \neq 0).$$

Puesto que $\lim\limits_{x\to\infty} (1/x^2) = 0$, utilizando el teorema 2 (para $x \to \infty$), obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} (100 + 1/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty} (1 + 100/x^2)} = \frac{100}{1} = 100. \quad ▲$$

Los ejemplos 2 y 8 permiten enunciar las reglas generales para calcular los límites de las formas $\lim\limits_{x\to a} R(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} R(x)$. Aquí $R(x)$ es una función racional (fracción racional), es decir,

$R(x) = P_n(x)/Q_m(x)$, donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son polinomios de grados n y m, respectivamente.

Si $\lim\limits_{x\to a} Q_m(x) = Q_m(a) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} R(x) = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}$.

Si $\lim\limits_{x\to a} Q_m(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} P_n(x) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} R(x) = \infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} Q_m(x) = \lim\limits_{x\to a} P_n(x) = 0$, entonces $P_n(x) = (x-a) \times \times P^*_{n-1}(x)$, $Q_m(x) = (x-a)Q^*_{m-1}(x)$ y

$$\lim_{x\to a} R(x) = \lim_{x\to a} \frac{P^*_{n-1}(x)}{Q^*_{m-1}(x)}.$$

Para calcular $\lim\limits_{x\to\infty} R(x)$ hay que dividir el numerador y el denominador de la función $R(x)$ por x^m y luego calcular el límite de la función obtenida, teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{Q_m(x)}{x^m} = b_0$, donde b_0 es el coeficiente de x^m del polinomio $Q_m(x)$.

9. Sea $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Demostrar que $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

△ Demostremos que la función $f(x) + g(x)$ satisface la definición de función infinita con signo «más» en el punto a, es decir, $\forall M > 0\ \exists\delta > 0$ tal que $\forall x$, que satisface la condición de $0 < |x - a| < \delta$, se cumple la desigualdad $f(x) + g(x) > M$. Puesto que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, existe un entorno δ_1 del punto a, en el cual (para $x \neq a$)

$$|f(x)| < C, \qquad (2)$$

donde C es cierto número positivo (demuéstrelo por sí mismo). Designemos un $M > 0$ arbitrario. Puesto que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Para el número $M + C\ \exists\delta > 0$ $(\delta \leqslant \delta_1)$ tal que $\forall x$, que satisfaga la condición de $0 < |x - a| < \delta$, se cumple la desigualdad

$$g(x) > M + C. \qquad (3)$$

De las desigualdades (2) y (3) obtenemos que para $0 < |x - a| < \delta \leqslant \delta_1$ es válida la desigualdad

$$f(x) + g(x) \geqslant g(x) - |f(x)| > M + C - C = M,$$

lo que se trataba de demostrar. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

1. Utilizando la definición de límite de una función según Cauchy, demuéstrese que $\lim\limits_{x\to 0} (x \operatorname{sen}(1/x)) = 0$.

2. Demúestrese que la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no tiene límite en el punto $x = 0$.

3. ¿Existe o no el $\lim_{x\to 0} \{x\}$, donde $\{x\} = x - [x]$ es la parte fraccional del número x?

4. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ si } x \text{ es un número irracional;} \\ 1, \text{ si } x \text{ es un número racional.} \end{cases}$ Demuéstrese que $f(x)$ tiene límite en los puntos $x = 1$ y $x = -1$ y no tiene límite en los demás puntos.

5. Demuéstrese que: a) $\lim_{x\to 0} (1 - \cos x) = 0$; b) $\lim_{x\to 0} \operatorname{tg} x = 0$.

6. a) Recurriendo a la desigualdad $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$ $(0 < x < \pi/2)$ y al teorema 3, demuéstrese que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (PRIMER LÍMITE SINGULAR O BÁSICO).

b) Aprovechando el primer límite singular, demuéstrese que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

7. Sea

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x_m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}, \ a_0 \neq 0, \ b_0 \neq 0.$$

Demuéstrese que

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty & \text{siendo } n > m, \\ a_0/b_0 & \text{cuando } n = m, \\ 0 & \text{para } n < m. \end{cases}$$

8. Calcúlense los límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x+3x^2)}{x^4+x^3}$;

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2}$; c) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$;

d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$; e) $\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x-1}$ (m es un número natural).

9. Calcúlense los límites:

a) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; b) $\lim_{x\to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

c) $\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

10. Calcúlense los límites:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{(x-2)(x+1)}$; b) $\lim_{x\to\infty} \frac{(x-3)^{40}(5x+1)^{10}}{(3x^2-2)^{25}}$;

c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$; d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+1}}$.

11. Demuéstrese que no existe $\lim_{x\to\infty} \cos x$.

12. ¿Existe o no $\lim_{x\to a} (x)$, si:

a) $a=1$, $f(x)=x \operatorname{sgn}(x-1)$, donde $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{para } x>0 \\ 0, & \text{para } x=0. \\ -1, & \text{para } x<0; \end{cases}$

b) $a=0$, $f(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & \text{para } x<0, \\ \frac{x}{2x+x^2}, & \text{para } x>0; \end{cases}$

c) $a=0$, $f(x)=\begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{para } x<0, \\ \cos x, & \text{para } x\geqslant 0? \end{cases}$

13. Sea $\lim_{x\to a} f(x)=b$, $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$. Demuéstrese que:

a) $\lim_{x\to a} (f(x)-g(x))=-\infty$; b) $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)}=\infty$ (cuando $b\neq 0$);

c) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=0$; d) $\lim_{x\to a} f(x)\,g(x)=\infty$ (cuando $b\neq 0$).

14. Sea $\lim_{x\to a} f(x)=0$ (además $f(x)\neq 0$ cuando $x\neq a$), $\lim_{x\to a} g(x)=b\neq 0$. Demuéstrese que $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)}=\infty$.

§ 2. Continuidad de la función en un punto

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Continuidad de la función en un punto. Sea una función definida en cierto entorno del punto a.

DEFINICIÓN. *Una función $f(x)$ se llama **continua en el punto** a, si* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Supongamos que la función $f(x)$ está definida en el semientorno derecho (izquierdo) del punto a, es decir, en cierto semiintervalo $[a, a+\varepsilon)$ (respectivamente $(a-\varepsilon, a]$). La función $f(x)$ se llama *continua a la derecha* (*a la izquierda*) en el punto a, si $f(a+0) = f(a)$ [respectivamente $f(a-0) = f(a)$].

Teorema 6. *Para que una función sea continua en el punto a, es necesario y suficiente que sea continua en este punto a la derecha y a la izquierda.*

Teorema 7. *Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el punto a, entonces las funciones $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\,g(x)$, $f(x)/g(x)$ también son continuas en el punto a (el cociente siempre que $g(a)\neq 0$).*

2. Continuidad de la función compuesta. Supongamos que la función $y=\varphi(x)$ está definida en el conjunto X, en tanto que Y es un conjunto de valores de esta función. Supongamos, además, que en el conjunto Y está definida la función $u=f(y)$. Se dice que en el

conjunto X está definida *una función compuesta* y se denota $u = f(y)$, donde $y = \varphi(x)$, o $u = f(\varphi(x))$.

Teorema 8. *Sea la función $y = \varphi(x)$ continua en el punto a y la función $u = f(y)$, continua en el punto $b = \varphi(a)$. En este caso la función compuesta $u = f(\varphi(x)) = F(x)$ será continua en el punto a.*

3. Continuidad de las funciones elementales

Las funciones $y = C = \text{const}$, $y = x^{\alpha}$, $y = a^x$, $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ se llaman *funciones elementales más simples* (o *fundamentales*).

La función se llama *elemental*, si puede obtenerse con ayuda de un número finito de operaciones aritméticas y de superposiciones sobre las funciones elementales más simples.

La reunión de todas las funciones elementales se llama *clase de funciones elementales.*

Junto con las funciones elementales más simples se utilizan con frecuencia las llamadas funciones hiperbólicas:

el seno hiperbólico $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$;

el coseno hiperbólico $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$;

la tangente hiperbólica $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x/\operatorname{ch} x$;

la cotangente hiperbólica $\operatorname{cth} x = \operatorname{ch} x/\operatorname{sh} x$.

Teorema 9. *Toda función elemental definida en un entorno de cierto punto es continua en este punto.*

4. Segundo límite singular o básico:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e \simeq 2{,}718281828459045 \ldots .$$

Advirtamos que este límite es una indeterminación del tipo 1^{∞}.

5. Clasificación de los puntos de discontinuidad. Sea a el punto límite del campo de definición de la función $f(x)$. El punto a se llama *punto de discontinuidad* de la función $f(x)$, si $f(x)$ en este punto no es continua. Supongamos que $f(x)$ está definida en cierto entorno del punto a, a la posible excepción del propio punto a. Entonces a se llama:

1) *punto de discontinuidad evitable* de la función $f(x)$, si existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, pero o bien $f(x)$ no está definida en el punto a, o bien $f(a) \neq b$ (si asignamos $f(a) = b$, la función $f(x)$ se hace continua en el punto a, es decir, la discontinuidad se elimina);

2) *punto de discontinuidad de* I *especie* de la función $f(x)$, si existen $f(a + 0)$ y $f(a - 0)$, pero $f(a + 0) \neq f(a - 0)$;

3) *punto de discontinuidad de* II *especie* de la función $f(x)$, si en el punto a no existe por lo menos uno de los límites laterales de la función $f(x)$.

II. Preguntas y tareas de control

1. Enúnciense las definiciones: a) de continuidad de la función en un punto; b) de continuidad de la función por la derecha (por la izquierda) en un punto.

2. Cítense las condiciones necesarias y suficientes de continuidad de la función en un punto.
3. Investíguese la continuidad de la función $f(x)$ en un punto arbitrario a:
   a) $f(x) = x^2$;
   b) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \text{ es un número irracional}; \\ 1, \text{ si } x \text{ es un número racional} \end{cases}$ (función de Dirichlet)
4. ¿Qué funciones se llaman elementales?
5. Demuéstrese que la función $y = \operatorname{sen} x$ es continua en todo punto a.
6. ¿Para qué valores del argumento x la función $f(x) = \operatorname{arcsen}(\ln x)$ es continua? ¿Sobre la base de qué teorema?
7. ¿Qué puntos se llaman puntos de discontinuidad de una función?
8. Dense las definiciones del punto de discontinuidad evitable y de los puntos de discontinuidad de I y de II especies.
9. Hállense los puntos de discontinuidad de la función de Dirichlet. Indíquese el tipo de estos puntos de discontinuidad.
10. Indíquese el tipo de discontinuidad de la función $f(x)$:
   a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$; b) $f(x) = |x|/x$.
11. Enúnciese el teorema de continuidad de la función compuesta. Utilizando este teorema y el primer límite singular, calcúlese

$$\lim_{x\to 0} \ln \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

12. ¿Qué funciones se llaman hiperbólicas? ¿Pertenecen éstas a la clase de funciones elementales? ¿Para qué valores del argumento estas funciones son continuas?

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Investigar la continuidad de la función $f(x)$ e indicar el tipo de sus puntos de discontinuidad, si:

$$\text{a)}\ f(x) = \frac{x^2}{x};\ \text{b)}\ f(x) = e^{-1/x};\ \text{c)}\ f(x) = \begin{cases} x & \text{cuando } x \leqslant 1, \\ \ln x & \text{cuando } x > 1. \end{cases}$$

△ a) La función $f(x) = x$, cuando $x \neq 0$, y no está definida, cuando $x = 0$. Puesto que $\forall a\ \lim\limits_{x\to a} x = a$, en caso de que $a \neq 0$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a = f(a)$ y, por consiguiente, $f(x)$ es continua en todo punto $a \neq 0$. En el punto $x = 0$ $f(x)$ tiene una discontinuidad evitable, por cuanto existe el $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

b) La función $f(x) = e^{-1/x}$ es elemental, ya que representa de por sí la superposición de las funciones $y = -x^{-1}$ y $f = e^y$. La función $f(x)$ está definida para todos x, a excepción de $x = 0$; por consiguiente, según el teorema 9 es continua en cualquier punto $x \neq 0$.

Puesto que $f(x)$ está definida en el entorno del punto $x = 0$, pero no lo está en el propio punto, tendremos que $x = 0$ es un punto de discontinuidad. Calculemos $f(0+0)$ y $f(0-0)$, haciendo uso de la definición del límite lateral de la función según Heine. Examinemos una sucesión infinitésima arbitraria $\{x_n\}$ tal que $x_n > 0\ \forall n$. Ya que $\lim\limits_{n\to\infty} (-1/x_n) = -\infty$, tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-1/x_n} = 0$. Por consiguiente, $\lim\limits_{x\to 0+0} e^{-1/x} = 0$. Examinemos ahora otra sucesión infinitésima arbitraria $\{x'_n\}$ tal que $x'_n < 0\ \forall n$. Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} (-1/x'_n) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-1/x'_n} = +\infty$. Por eso $\lim\limits_{x\to 0-0} e^{-1/x} = +\infty$, es decir, $f(0-0) = +\infty$.

De esta manera, en el punto $x = 0$ no existe el límite de $f(x)$ a la izquierda, lo que significa que $x = 0$ es un punto de discontinuidad de II especie.

c) Demostremos la continuidad de $f(x)$ en el punto $a \neq 1$. Tomemos $\varepsilon < |a-1|$, $\varepsilon > 0$. Entonces el entorno ε del punto a no contiene el punto $x = 1$, si $\varepsilon < |a-1|$. En este entorno ε la función $f(x)$ coincide o bien con la función $\varphi(x) = x$, si $a < 1$, o bien con la función $\psi(x) = \ln x$, si $a > 1$. Puesto que las mencionadas funciones elementales más simples son continuas en el punto a, tendremos que $f(x)$ también será continua en todo punto $a \neq 1$. Investiguemos la continuidad de la función $f(x)$ en el punto $a = 1$. Para esto calculemos sus límites laterales en este punto, recurriendo a la continuidad de las funciones $\psi(x)$ y $\varphi(x)$ en el punto $a = 1$ y al teorema 6. Obtendremos

$$f(1+0) = \lim_{x\to 1+0} \ln x = \lim_{x\to 1} \ln x = \ln 1 = 0,$$

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1-0} x = \lim_{x\to 1} x = 1.$$

Así, pues, $f(1+0) \neq f(1-0)$, por eso en el punto $a = 1$ $f(x)$ tiene una discontinuidad de I especie. ▲

2. Demostrar que:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$.

△ a) Representemos la función $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ en forma de $\ln(1+x)^{1/x} = \ln y$, donde $y = (1+x)^{1/x}$. Ya que $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$ y la función $\ln y$ es continua en el punto $y = e$, obtenemos que $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln e = 1$.

b) Examinemos la función $y = \varphi(x) = a^x - 1$. Ésta es continua en el punto $x = 0$ e $y(0) = 0$. Además

$$x = \log_a(1+y) \quad \text{y} \quad \frac{a^x-1}{x} = \frac{y}{\log_a(1+y)}.$$

Calculemos el $\lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{\log_a (1+y)}$, empleando el resultado del p. a):

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\log_a (1+y)} = \lim_{y\to 0} \frac{y \ln a}{\ln (1+y)} = \ln a \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0} \frac{\ln (1+y)}{y}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a.$$

Examinemos ahora la función $f(y)$ que es continua en el punto $y=0$:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{\log_a (1+y)} & \text{cuando } y \neq 0, \\ \ln a & \text{cuando } y = 0. \end{cases}$$

Según el teorema 8, la función compuesta

$$f(\varphi(x)) = \begin{cases} \frac{a^x - 1}{x} & \text{cuando } x \neq 0, \\ \ln a & \text{cuando } x = 0 \end{cases}$$

es continua en el punto $x=0$. Por eso $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

15. Investíguese la continuidad de la función $f(x)$ e indíquese el tipo de sus puntos de discontinuidad (véanse los ejer. 1—4):

a) $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$; b) $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$; c) $f(x) = \{x\}$;

d) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \text{ es un número irracional;} \\ 1, & \text{si } x \text{ es un número racional;} \end{cases}$

e) $f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+1}$; f) $f(x) = \operatorname{arctg}(1/x)$; g) $f(x) = \frac{1}{1 - e^{x/(1-x)}}$;

h) $f(x) = \ln \frac{x^2}{(x+1)(x-3)}$; i) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{para } 0 \leqslant x < 1, \\ 2-x, & \text{para } 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} x & \text{cuando } |x| \leqslant 1, \\ 1 & \text{cuando } |x| > 1; \end{cases}$ l) $f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x/2) & \text{cuando } |x| \leqslant 1, \\ |x-1| & \text{cuando } |x| > 1. \end{cases}$

16. Demuéstrese que:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = 1$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \operatorname{ch} x}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

§ 3. Comparación de las funciones infinitésimas. Símbolo "*o* pequeña" y sus propiedades

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Comparación de las funciones infinitésimas. La función $\alpha(x)$ se llama *infinitamente pequeña (infinitésima) cuando $x \to a$ (en el punto a)*, si $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$. Sean $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ dos funciones infinitési-

mas cuando $x \to a$. Las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ reciben el nombre de:

a) *infinitésimas del mismo orden cuando* $x \to a$ *(en el punto* a*)*, si

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0,$$

b) *infinitésimas equivalentes cuando* $x \to a$ *(en el punto* a*)*, si

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \text{ (la notación es: } \alpha \sim \beta \text{ cuando } x \to a).$$

Si $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, se dice que $\alpha(x)$ es *una infinitésima de orden superior cuando* $x \to a$ *(en el punto* a*), respecto a* $\beta(x)$, y se escribe $\alpha = o(\beta)$ cuando $x \to a$ (α es igual a «o pequeña» de β cuando $x \to a$).

Por ejemplo $x^2 = o(x)$ cuando $x \to 0$.

Definiciones análogas tienen lugar para los casos de $x \to a + 0$, $x \to a - 0$, $x \to \infty$.

Es necesario tomar en consideración que las igualdades, que contienen el símbolo «o pequeña», son convencionales. Por ejemplo, la igualdad $x^2 = o(x)$ cuando $x \to 0$ es cierta, pero $o(x) = x^2$ no es cierta, puesto que el símbolo $o(x)$ designa no una función concreta, sino que toda función que cuando $x \to 0$ es infinitésima de orden superior que x. Existe una cantidad infinitamente grande de semejantes funciones: en particular, cualquier función x^p (donde $p > 1$), es $o(x)$ cuando $x \to 0$. Así, pues, la igualdad $x^2 = o(x)$ cuando $x \to 0$ significa que la función x^2 pertenece al conjunto de funciones infinitésimas de orden superior cuando $x \to 0$ que x. Por eso «en sentido contrario» esta igualdad ($o(x) = x^2$) no es cierta: todo el conjunto de funciones $o(x)$ no se reduce a una sola función x^2.

2. Propiedades del símbolo "o pequeña"

Teorema 10. *Supongamos que* $\alpha_1(x)$ *y* $\alpha_2(x)$ *son dos funciones infinitésimas cuando* $x \to a$ *tales que* $\alpha_1(x) = o(\beta)$ *y* $\alpha_2(x) = o(\beta)$. *Entonces* $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = o(\beta)$ *cuando* $x \to a$.

Este teorema puede escribirse en forma abreviada de la siguiente manera: $o(\beta) + o(\beta) = o(\beta)$.

A la par con la propiedad indicada, enunciemos otras propiedades del símbolo «o pequeña» (en todos los casos se considera que $\alpha \to 0$ y $\beta \to 0$ cuando $x \to a$).

1ª. $o(\beta) + o(\beta) = o(\beta)$.

2ª. $o(\beta) - o(\beta) = o(\beta)$.

3ª. $o(c\beta) = o(\beta)\ \forall$ número $c \neq 0$.

4ª. $co(\beta) = o(\beta)\ \forall$ número $c \neq 0$.

5ª. $o(\beta^n) = o(\beta^k)$, $\quad n \geqslant 2\ (n \in \mathbf{N})$, $\quad k = 1, 2, \ldots, n-1$.

6ª. $(o(\beta))^n = o(\beta^n)\ \ \forall n \in \mathbf{N}$.

7ª. $\beta^n o(\beta) = o(\beta^{n+1})\ \ \forall n \in \mathbf{N}$.

8ª. $\frac{o(\beta^n)}{\beta} = o(\beta^{n-1})$. $n \geqslant 2\ (n \in \mathbf{N})$.

Designemos una función infinitésima cualquiera cuando $x \to a$ con el símbolo $o\,(1)$. Entonces la 8ª propiedad será válida también para $n = 1$: $\frac{o(\beta)}{\beta} = o\,(1)$.

9ª. $o\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\beta^k\right) = o\,(\beta)$, donde c_k son números.

10ª. $o\,(o\,(\beta)) = o\,(\beta)$.

11ª. $o\,(\beta + o\,(\beta)) = o\,(\beta)$.

12ª. $\alpha\beta = o\,(\alpha)$ y $\alpha\beta = o\,(\beta)$.

13ª. Si $\alpha \sim \beta$, entonces $\alpha - \beta = o\,(\alpha)$ y $\alpha - \beta = o\,(\beta)$.

II. Preguntas y tareas de control

1. Dése la definición de la función infinitésima: a) cuando $x \to a$: b) cuando $x \to \infty$. Adúzcanse ejemplos de semejantes funciones.
2. Enúnciese la definición y cítense ejemplos de la función infinitésima $\alpha\,(x)$:
   a) de un mismo orden que la función $\beta\,(x)$ en el punto a;
   b) equivalente a la función $\beta\,(x)$ en el punto a;
   c) de orden superior cuando $x \to a$ que $\beta\,(x)$.
   ¿Qué significa la notación simbólica $\alpha = o\,(\beta)$ cuando $x \to a$?
3. Pónganse ejemplos de funciones $\alpha\,(x)$, para las cuales son válidas las igualdades: a) $\alpha\,(x) = o\,(x)$ cuando $x \to 0$; b) $\alpha\,(x) = o\,(\sqrt{1-x})$ cuando $x \to 1-0$; c) $\alpha\,(x) = o\,(1/x^2)$ cuando $x \to \infty$.
4. Demuéstrese que $x^3 = o\,(x^2)$ cuando $x \to 0$. ¿Es cierta la igualdad $x^3 = o\,(\beta)$ cuando $x \to 0$, si: a) $\beta\,(x) = x$; b) $\beta\,(x) = x^2\sqrt{|x|}$; c) $\beta\,(x) = x^3\sqrt{|x|}$; d) $\beta\,(x) = x^2 \operatorname{sen} x$?
5. Demuéstrese que $(x-1)^2 = o\,(x-1)$ cuando $x \to 1$. ¿Es cierta la igualdad $(x-1)^2 = o\,(\beta)$ cuando $x \to 1$, si: a) $\beta\,(x) = (x-1)^3$; b) $\beta\,(x) = \operatorname{sen}\,(x-1)^2$; c) $\beta\,(x) = \frac{(x-1)^2}{\ln x}$?
6. Demuéstrese que $1/x^4 = o\,(1/x^3)$ cuando $x \to \infty$. ¿Es cierta la igualdad $1/x^4 = o\,(\beta)$ cuando $x \to \infty$, si:
   a) $\beta\,(x) = \frac{1}{x^k}$ $(k = 1,\ 2)$; b) $\beta\,(x) = \frac{1}{x^5}$; c) $\beta\,(x) = \frac{1}{(x+1)^4}$;
   d) $\beta\,(x) = \frac{1}{x^3 \operatorname{sen} x}$; e) $\beta\,(x) = \frac{1}{(x-1)^4 \operatorname{arctg}(1/x)}$?
7. ¿Son las funciones $\operatorname{sen} x$ y x infinitésimas equivalentes cuando $x \to 0$? Demuéstrese que $\operatorname{sen} x - x = o\,(x)$ cuando $x \to 0$.
8. Valiéndose de las propiedades del símbolo «o pequeña», escríbase para la función $\alpha\,(x)$ una igualdad de la forma $\alpha\,(x) = o\,(x^k)$ cuando $x \to 0$, si:
   $\alpha\,(x) = o\,(x^2) + o\,(x^2)$; $\alpha\,(x) = o\,(x) - o\,(x)$; $\alpha\,(x) = 5o\,(x)$;
   $\alpha\,(x) = o\,(3x^2)$; $\alpha\,(x) = (o\,(x))^3$; $\alpha\,(x) = xo\,(x)$; $\alpha\,(x) = \frac{o(x^5)}{x^2}$;
   $\alpha\,(x) = o\,(-x + 2x^3 + x^4)$; $\alpha\,(x) = o\,(o\,(x^2))$; $\alpha\,(x) = o\,(x + o\,(x))$.

9. Aprovechando las propiedades del símbolo «o pequeña», escríbase para la función $\alpha(x)$ la igualdad de la forma $\alpha(x) = o(1/x^k)$, cuando $x \to \infty$, si:
$\alpha(x) = o(1/x) - o(1/x)$, $\alpha(x) = 1000o(1/x)$,
$\alpha(x) = o(1000/x)$, $\alpha(x) = (o(1/\sqrt{|x|}))^2$, $\alpha(x) = x^2 o(1/x^3)$,
$\alpha(x) = o\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$; $\alpha(x) = o\left(o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$;
$\alpha(x) = o\left(\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$.

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. ¿Será cierta la igualdad $\alpha(x) = o(x)$ cuando $x \to 0$, si: a) $\alpha(x) = 2x^2$, b) $\alpha(x) = 3x$, c) $\alpha(x) = \sqrt{|x|}$, d) $\alpha(x) = \frac{x}{\ln|x|}$; e) $\alpha(x) = 1 - \cos x$?

△ a) $2x^2 = o(x)$, puesto que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2}{x} = 0$.

b) La igualdad $3x = o(x)$ no es cierta, por cuanto que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{x} = 3 \neq 0$. Las funciones $3x$ y x son infinitésimas de un mismo orden cuando $x \to 0$.

c) $\sqrt{|x|} \neq o(x)$, ya que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \infty$.

d) $\frac{x}{\ln|x|} = o(x)$, por cuanto que $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{\ln|x|} : x\right) = 0$.

e) $1 - \cos x = o(x)$, puesto que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}^2(x/2)}{x/2} = \lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{\mathrm{sen}(x/2)}{x/2}\right]^2 \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0$. ▲

2. ¿Será cierta la igualdad $\alpha(x) = o(x^2)$ cuando $x \to 0$, si: a) $\alpha(x) = \mathrm{sen}^2 x$; b) $\alpha(x) = x^3$; c) $\alpha(x) = 1 - \cos x$?

△ a) $\mathrm{sen}^2 x \neq o(x^2)$, debido a que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\mathrm{sen}\, x}{x}\right)^2 = 1$. Las funciones $\mathrm{sen}^2 x$ y x^2 son infinitésimas equivalentes en el punto $x = 0$.

b) $x^3 = o(x^2)$, a causa de que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$.

c) $1 - \cos x \neq o(x^2)$, puesto que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. Las funciones $1 - \cos x$ y x^2 son infintésimas de un mismo orden en el punto $x = 0$. ▲

3. Utilizando los límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} = 1$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$; d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{1 + x} - 1}{x} = \frac{1}{n}$

(siendo n un número natural), representar las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\sqrt[n]{1+x}$ en la forma

$$\psi(x)=a_0+a_1x^k+o(x^k) \text{ cuando } x\to 0,$$

donde $k=1$ ó 2; a_0 y a_1 son ciertos números.

△ Al principio demostremos que si $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son infinitésimas de un mismo orden cuando $x\to a$, es decir, $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$, entonces $\alpha(x)=c\beta(x)+o(\beta)$ cuando $x\to a$.

En efecto, puesto que

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-c\right)=0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)-c\beta(x)}{\beta(x)}=0,$$

según la definición del símbolo $o(\beta)$ tenemos $\alpha(x)-c\beta(x)=o(\beta)$, o bien

$$\alpha(x)=c(\beta(x)+o(\beta) \text{ cuando } x\to a. \tag{1}$$

De las igualdades a) . . . d), recurriendo a la fórmula (1), obtenemos

$$\operatorname{sen} x=x+o(x) \qquad \text{cuando } x\to 0; \tag{2}$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \qquad \text{cuando } x\to 0; \tag{3}$$

$$\ln(1+x)=x+o(x) \qquad \text{cuando } x\to 0; \tag{4}$$

$$\sqrt[n]{1+x}=1+\frac{1}{n}x+o(x) \qquad \text{cuando } x\to 0. \tag{5}$$

Las fórmulas (2) . . . (5) se llaman *fórmulas asintóticas*, o también *desarrollos asintóticos* o bien *representaciones asintóticas de las funciones* $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\sqrt[n]{1+x}$ cuando $x\to 0$. El último sumando en el segundo miembro de estas fórmulas [$o(x)$ u $o(x^2)$] se llama *término residual de la fórmula asintótica.* ▲

4. Demostrar las propiedades 2ª, 3ª, 6ª, 9ª, 10ª del símbolo «*o* pequeña».

△ Recordemos que el símbolo $o(\beta)$, que forma parte del primer miembro de las fórmulas, designa toda función infinitésima en el punto a de orden superior que $\beta(x)$.

1. Demostremos primero las propiedades 2ª, 3ª y 6ª, es decir,

$$o(\beta)-o(\beta)=o(\beta), \tag{6}$$

$$o(c\beta)=o(\beta)\ \forall \text{ número } c\neq 0, \tag{7}$$

$$(o(\beta))^n=o(\beta^n)\ \forall n\in \mathbf{N}. \tag{8}$$

Designemos con $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\alpha(x)$ unas funciones infinitésimas arbitrarias en el punto a tales que $\alpha_1(x)=o(\beta)$, $\alpha_2(x)=o(\beta)$, $\alpha(x)=o(c\beta)$ cuando $x\to a$. Según la definición del símbolo «*o* pe-

queña» estas igualdades significan que

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}=0, \tag{9}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha_2(x)}{\beta(x)}=0, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{c\beta(x)}=0 \quad (c\neq 0). \tag{11}$$

Para demostrar la validez de las igualdades (6) . . . (8) hace falta establecer que

$$\alpha_1(x)-\alpha_2(x)=o(\beta),\quad \alpha(x)=o(\beta),$$
$$(\alpha_1(x))^n=o(\beta^n),$$

es decir,

$$L_1=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}{\beta(x)}=0,$$

$$L_2=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0,\quad L_3=\lim_{x\to a}\frac{(\alpha_1(x))^n}{(\beta(x))^n}=0.$$

Teniendo en cuenta (9) y (10), obtenemos

$$L_1=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}-\lim_{x\to a}\frac{\alpha_2(x)}{\beta(x)}=0-0=0,$$

$$L_3=\left(\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}\right)^n=0^n=0.$$

Con ayuda de la igualdad (11) encontramos

$$L_2=c\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{c\beta(x)}=c\cdot 0=0.$$

Así queda demostrada la validez de las fórmulas (6) . . . (8).

2. Demostremos ahora las propiedades 9ª y 10ª, es decir,

$$o\left(\sum_{k=1}^{n}c_k\beta^k\right)=o(\beta)\ (c_k \text{ son números}), \tag{12}$$

$$o(o(\beta))=o(\beta). \tag{13}$$

Designemos con $\psi(x)$, $\alpha(x)$ y $\varphi(x)$ unas funciones infinitésimas arbitrarias en el punto a tales que

$$\psi(x)=o\left(\sum_{k=1}^{n}c_k\beta^k\right),\ \alpha(x)=o(\beta),\ \varphi(x)=o(\alpha)=o(o(\beta)),$$

es decir,

$$\lim_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\sum_{k=1}^{n}c_k\beta^k}=0, \tag{14}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0, \tag{15}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}=0. \tag{16}$$

Para demostrar la validez de las igualdades (12) y (13) es menester demostrar que

$$L_1=\lim_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\beta(x)}=0,\quad L_2=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\beta(x)}=0.$$

Tomando en consideración (14), (15) y (16), obtendremos

$$L_1=\lim_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\sum_{k=1}^{n}c_k\beta^k}\lim_{x\to a}\frac{\sum_{k=1}^{n}c_k\beta^k}{\beta(x)}=0\cdot c_1=0,$$

$$L_2=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0\cdot 0=0.$$

De esta manera la validez de las fórmulas (12, 13) queda demostrada. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

17. Haciendo uso de los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\,(a>0,\ a\neq 1)$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}x}{x}=1$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{th}x}{x}=1$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\operatorname{ch}x}{x^2}=-\frac{1}{2}$, obténganse las fórmulas asintóticas (cuando $x\to 0$) para las funciones a^x, e^x, $(1+x)^a$, $\operatorname{sh}x$, $\operatorname{th}x$, $\operatorname{ch}x$.

18. Demuéstrense las propiedades 1ª, 4ª, 5ª, 7ª, 8ª, 11ª — 13ª del símbolo «*o* pequeña».

19. ¿Será válida la igualdad $o(o(x))=o(x^{1+\varepsilon})$ cuando $x\to 0$; si: a) $\varepsilon>0$; b) $\varepsilon=0$; c) $-1<\varepsilon<0$? Arguméntese la respuesta.

20. ¿Son válidas o no las igualdades: a) $o(x+x^2)=o(x^2)$, cuando $x\to 0$; b) $o(x)=o(x^2)$, cuando $x\to 0$; c) $o(x^2)=o(x)$, cuando $x\to 0$; d) $o(1/x)=o(1/x^2)$, cuando $x\to\infty$; e) $o(1/x^2)=o(1/x)$, cuando $x\to\infty$? Arguméntese la respuesta.

21. Utilizando las propiedades del símbolo «o pequeña», escríbase para la función $\alpha(x)$ la igualdad de la forma $\alpha(x) = o(1)$ o $\alpha(x) = o((x-a)^k)$ cuando $x \to a$ (k es un número natural), si:

a) $\alpha(x) = o(-5x + x^2 - x^3 + o(-5x + x^2 - x^3))$ cuando $x \to 0$;

b) $\alpha(x) = (x-1)\, o((x-1)^2 + o(x-1))$ cuando $x \to 1$;

c) $\alpha(x) = \frac{1}{5x} o(3x + x^2)$ cuando $x \to 0$.

22. Valiéndose de las propiedades del símbolo «o pequeña», escríbase para la función $\alpha(x)$ la igualdal de la forma $\alpha(x) = o(1)$ o $\alpha(x) = o(1/x^k)$ cuando $x \to \infty$ (k es un número natural), si:

a) $\alpha(x) = o\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$;

b) $\alpha(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$; c) $\alpha(x) = x^2 \cdot o\left(\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$;

d) $\alpha(x) = x\left(o\left(\frac{1}{x^2}\right) - o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$; e) $\alpha(x) = 5x \cdot o\left(\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

§ 4. Cálculo de los límites de funciones con ayuda de las fórmulas asintóticas. Cálculo de los límites de las funciones potencial-exponenciales

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Fórmulas asintóticas. En los ejemplos y los problemas del § 3 se han obtenido las fórmulas asintóticas para las funciones elementales simples cuando $x \to 0$. Escribamos estas fórmulas en forma de una tabla:

I. $\operatorname{sen} x = x + o(x)$

II. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

III. $\ln(1 + x) = x + o(x)$.

IV. $a^x = 1 + x \ln a + o(x)$ $(a > 0)$; $e^x = 1 + x + o(x)$.

V. $(1 + x)^a = 1 + ax + o(x)$.

VI. $\operatorname{tg} x = x + o(x)$.

VII. $\operatorname{sh} x = x + o(x)$.

VIII. $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$.

IX. $\operatorname{th} x = x + o(x)$.

Las fórmulas expuestas quedan válidas, si en ellas el argumento x se sustituye o bien por x_n, donde $\{x_n\}$ es una sucesión infinitésima, o bien por $y(x)$, donde $\lim\limits_{x \to a} y(x) = 0$. Por ejemplo, es válida la representación que se deduce de la fórmula I:

$$\operatorname{sen} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donde $\{o(1/n^2)\}$ es una sucesión infinitésima de orden superior que $\{1/n^2\}$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{o(1/n^2)}{1/n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 o(1/n^2) = 0$.

La función $y(x) = x - 1$ es infinitésima cuando $x \to 1$, por eso de la fórmula III se obtiene la igualdad

$$\ln(1 + y(x)) = y(x) + o(y) \text{ cuando } x \to 1,$$

o bien

$$\ln(1 + (x - 1)) = \ln x = x - 1 + o(x - 1) \text{ cuando } x \to 1.$$

Utilizando esta igualdad y la fórmula II, escribamos la representación asintótica de la función $\cos \ln x$ cuando $x \to 1$:

$$\cos \ln x = \cos(x - 1 + o(x - 1)) = 1 - \frac{(x - 1 + o(x - 1))^2}{2} + o((x - 1 + o(x - 1))^2).$$

Basándonos en las propiedades del símbolo «o pequeña», obtenemos

$$\frac{(x-1+o(x-1))^2}{2} = \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)\,o(x-1) + \frac{1}{2}[o(x-1)]^2 = \frac{(x-1)^2}{2} + o(x-1)^2 + o(x-1)^2 = \frac{(x-1)^2}{2} + o(x-1)^2.$$

De manera análoga,

$$(x - 1 + o(x - 1))^2 = (x - 1)^2 + o(x - 1)^2.$$

En virtud de la 11ª propiedad tenemos

$$o((x - 1)^2 + o(x - 1)^2) = o(x - 1)^2.$$

Definitivamente obtendremos

$$\cos \ln x = 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + o(x - 1)^2 \text{ cuando } x \to 1.$$

2. Cálculo de los límites de las funciones potencial-exponenciales. Examinemos el cálculo del límite, cuando $x \to a$, de una función potencial-exponencial $[u(x)]^{v(x)}$, donde las funciones $u(x)$ y $v(x)$ están definidas en cierto entorno del punto a, además $u(x) > 0$.

Son posibles los casos siguientes:

1. Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b > 0$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = c$, tendremos $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = b^c$.

2. Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = c > 0$ (ó $+\infty$), entonces $\lim\limits_{x\to a} u^v = 0$.

3. Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = c < 0$ (ó $-\infty$), resulta que $\lim\limits_{x\to a} u^v = +\infty$.

4. Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} v(x)=0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$ se llama *límite indeterminado del tipo* 0^0.

5. Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} v(x)=c>0$ (ó $+\infty$), obtendremos que $\lim\limits_{x\to a} u^v=+\infty$.

6. Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} v(x)=c<0$ (ó $-\infty$), resulta que $\lim\limits_{x\to a} u^v=0$.

7. Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} v(x)=0$ entonces $\lim\limits_{x\to a} u^v$ se llama *límite indeterminado del tipo* ∞^0.

8. Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a} v(x)=\infty$, obtendremos $\lim\limits_{x\to a} u^v$ que se llama *límite indeterminado del tipo* 1^∞. A este tipo de indeterminación pertenece el segundo límite básico:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Si presentamos u^v en forma de $e^{v\ln u}$, entonces resulta que cada una de las indeterminaciones (0^0, ∞^0, 1^∞) se puede reducir a la indeterminación del tipo $0\cdot\infty$ para la función $v\ln u$.

Si en este caso $\lim\limits_{x\to a} v\ln u=b$, entonces $\lim\limits_{x\to a} u^v=e^b$.

II. Preguntas y tareas de control

1. Escríbanse las fórmulas asintóticas para las funciones sen x tg x, cos x, ln $(1+x)$, e^x, a^x, $(1+x)^a$, sh x, th x, ch x cuando $x\to 0$.
2. Escríbanse las fórmulas asintóticas con el término residual de forma $o(x^\alpha)$, cuando $x\to 0$, o bien $o(1/x^\alpha)$, cuando $x\to\infty$ $(\alpha>0)$ para las funciones compuestas sen y, tg y, cos y, ln $(1+y)$, e^y, a^y, $(1+y)^a$, sh y, th y, ch y, si: a) $y=3x$ y $x\to 0$; b) $y=\sqrt{x}$ y $x\to+0$; c) $y=x^3$ y $x\to 0$; d) $y=1/x$ y $x\to\infty$.
3. Escríbanse las fórmulas asintóticas con el término residual de forma $o(1/n^\alpha)$ $(\alpha>0)$ para las sucesiones sen x_n, tg x_n, cos x_n, ln $(1+x_n)$, e^{x_n}, a^{x_n}, $(1+x_n)^a$, sh x_n, th x_n, ch x_n, si: a) $x_n=1/n$; b) $x_n=1/n^2$; c) $x_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; d) $x_n=e^{1/n}-1$.
4. Dése la definición de una sucesión infinitésima $\{\alpha_n\}$ de orden superior que $\{1/n\}$, cuando $n\to\infty$. Dése la definición de una función infinitésima $\alpha(x)$ de orden superior que $1/x$, cuando $x\to\infty$. Escríbanse para α_n y $\alpha(x)$ las notaciones simbólicas correspondientes.
5. Qué orden de infinitud tienen la sucesión $\alpha_n=n\,o(1/n^2)$ cuando $n\to\infty$ y la función $\alpha(x)=x\,o(1/x^2)$ cuando $x\to\infty$ en comparación con $\{1/n\}$ y $\beta(x)=1/x$, respectivamente?

6. Utilizando la fórmula asintótica IV y de la definición de límite de una función según Heine, demuéstrese que $e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ cuando $n \to \infty$.
7. ¿Serán ciertas las igualdades:

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \text{ cuando } x \to 0;$$

$$\operatorname{ch}\frac{\pi}{n} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ cuando } n \to \infty?$$

Arguméntese la respuesta.
8. Cítense los casos posibles de cálculo de los límites de las funciones potencial-exponenciales. Adúzcanse ejemplos de tres tipos de límites indeterminados para semejantes funciones.
9. Calcúlense los límites:

$$\text{a) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{2x-3}\right)^x; \quad \text{b) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{2x}; \quad \text{c) } \lim_{x\to+0}(x)^{1/\ln x}.$$

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\operatorname{sen}\operatorname{tg}(x^2/2)}{\ln\cos 3x}$.

△ Escribamos el desarrollo asintótico del numerador, recurriendo a las fórmulas asintóticas para el seno y la tangente y a las propiedades del símbolo «o pequeña»:

$$\operatorname{sen}\operatorname{sen}\operatorname{tg}\frac{x^2}{2} = \operatorname{sen}\operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)\right) =$$

$$= \operatorname{sen}\left[\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) + o\left(\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)\right] =$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Aquí hemos aprovechado el hecho de que $o\left(\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)\right) = o(x^2)$ y $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$.

Anotemos ahora el desarrollo asintótico del denominador, utilizando las fórmulas asintóticas para el coseno y el logaritmo:

$$\ln\cos 3x = \ln\left(1 - \frac{(3x)^2}{2} + o((3x)^2)\right) =$$

$$= \ln\left(1 + \left(-\frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) = \left(-\frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right) +$$

$$+ o\left(-\frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{9x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2) =$$

$$= -\frac{9x^2}{2} + o(x^2).$$

Aquí hemos aprovechado las propiedades de que

$$o((3x)^2)=o(x^2),\quad o\left(-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)\right)=o(x^2), o(x^2)+o(x^2)=o(x^2).$$

De esta manera el límite dado es igual a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{9}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}=\frac{\frac{1}{2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{9}{2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2}}=-\frac{1}{9}.$$

Aquí hemos empleado el hecho de que, según la definición del símbolo "o pequeña", $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2}=0$. ▲

2. Calcular $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$.

△ Hagamos $y=x-a$, entonces el límite dado se escribirá así;

$$\lim_{y\to 0}\frac{a^{y+a}-a^a}{y}=a^a\lim_{y\to 0}\frac{a^y-1}{y}.$$

Puesto que $a^y=1+y\ln a+o(y)$, obtenemos

$$a^a\lim_{y\to 0}\frac{a^y-1}{y}=a^a\lim_{y\to 0}\frac{y\ln a+o(y)}{y}=a^a\left(\ln a+\lim_{y\to 0}\frac{o(y)}{y}\right)=a^a\ln a.$$

Así, pues, $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-a^a}{x-a}=a^a\ln a$. ▲

3. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{sen}(\pi\sqrt{n^2+1})$.

△ Utilizando la fórmula asintótica V para $x=1/n^2$ y $a=1/2$, obtenemos

$$\sqrt{n^2+1}=n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}=n\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=$$
$$=n+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

De aquí

$$\operatorname{sen}(\pi\sqrt{n^2+1})=\operatorname{sen}\left(\pi n+\frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$
$$=(-1)^n\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

La sucesión $\{(-1)^n\}$ está acotada y la $\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\}$ es infinitésima, por eso el producto de estas dos sucesiones también es una sucesión infinitésima. De esta manera

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}(\pi\sqrt{n^2+1})=0.\quad ▲$$

4. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

△ El límite dado es un límite indeterminado del tipo 1^∞, ya que $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, mientras que $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2 x = \infty$. Escribamos $(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$ en forma de $e^{\operatorname{ctg}^2 x\cdot \ln\cos x}$ y calculemos $L = \lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2 x \times$ $\times \ln\cos x$. Para esto anotemos el desarrollo asintótico para $\ln\cos x$ y $\operatorname{sen}^2 x$ cuando $x \to 0$:

$$\ln\cos x = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\operatorname{sen}^2 x = (x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2).$$

A partir de estas igualdades, encontramos

$$L = \lim_{x\to 0}\cos^2 x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{2}.$$

Así, pues, el límite buscado es igual a $e^L = e^{-1/2}$. ▲

5. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{tg}(1/n)}$.

△ El límite dado es un límite indeterminado del tipo 0^0. Para calcularlo anotemos $\left(\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{tg}(1/n)}$ en forma de $e^{\operatorname{tg}(1/n)\cdot\ln(1/n)}$ y calculemos el límite $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}\right)$. Obtendremos

$$L = \lim_{n\to\infty}\left[-\ln n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = -\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} -$$

$$-\lim_{n\to\infty}\left[\ln n\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = 0 - \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 0,$$

puesto que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$ ((véase el § 4, cap. II) y $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{o(1/n)}{1/n} = 0$.

De este modo $L = 0$, es decir, el límite buscado es igual a 1. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

23. Escríbanse los desarrollos asintóticos de las funciones siguientes, cuando $x \to 0$, con el término residual de forma $o(x^\alpha)$, donde $\alpha \geqslant 0$:

a) $\operatorname{sen}^2(5\sqrt{x})$, $\operatorname{sen}^2(5\sqrt{x} + x)$ $(x > 0)$; b) $\cos(4x^2)$; $\cos(4x^2 + x)$; c) e^{2x}, $e^{2x+\sqrt{x}}$ $(x > 0)$; d) $\ln(1 - x^2)$; $\ln(1 - x^2 + x)$; e) $3 - \sqrt{27 - x}$, $3 - \sqrt[3]{27 - x + \sqrt{x}}$ $(x > 0)$; f) 2^{x^3}, $2^{x^3+x^2}$; g) $\ln\cos 2x$, $\ln\cos(2x + x^2)$, h) $\cos\sqrt{\operatorname{sen} x}$, $\operatorname{ch}\sqrt{\operatorname{sen} x}$ $(x > 0)$,
i) $\ln(e^x + \sqrt{x})$ $(x > 0)$; k) $5^{e^x - \cos\sqrt{|x|}}$; l) $\sqrt[3]{\cos\sqrt{x}}$ $(x > 0)$;
m) $\cos x\cos x^2 - 1$.

24. Anótense los desarrollos asintóticos de las siguientes funciones, cuando $x \to 2$, con el término residual de forma $o\,(x-2)^{\alpha}$, donde $\alpha \geqslant 0$: a) $\operatorname{sen}(x-2)^2$; b) $(3-x)^{\beta}$; c) $\ln(x-1)$; d) $\cos(\pi x)$; e) $\operatorname{tg}(\pi x^2)$; f) $\sqrt[5]{x-1}-\sqrt[7]{x-1}$; g) x^x-4.

25. Escríbanse los desarrollos asintóticos de las siguientes funciones, cuando $x \to \infty$, con el término residual de forma $o\,(1/x^{\alpha})$, donde $\alpha \geqslant 0$: a) $\sqrt{x^2+x}-x$; b) $\sqrt{x^3+x}-x$;

$$\text{c) } \sqrt[4]{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}-x;$$

d) $\operatorname{sen}(1/\sqrt[3]{x^2})$, $\operatorname{sh}(1\ \sqrt[3]{x})$; e) $\cos(1/x^2)$; f) $5^{1/x}$; g) $\ln\cos(2/x)$, $\ln\operatorname{ch}(2/x)$; h) $e^{1/\sqrt{x}}-1$ $(x>0)$.

26. Anótense las fórmulas asintóticas para las siguientes sucesiones, con término residual de forma $o\,(1/n^{\alpha})$, donde $\alpha \geqslant 0$; a) $\sqrt[3]{n^3+n^2}-n$; b) $2^{1/n}+7^{1/n}-2$; c) $\operatorname{sen}(1/\sqrt{n})$.

27. Calcúlense los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$ $(m, n\in \mathbf{N})$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}$; g) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$;

h) $\lim\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$ cuando $x\to+0$, $x\to 1$, $x\to+\infty$;

i) $\lim\limits_{x\to\pi/4+0}\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}$;

k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ax+1}{bx+2}\right)^x$ $(a^2+b^2\neq 0)$; l) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$;

m) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{(\operatorname{ch}(\pi/n)-1)}$; n) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$ $(a>0,\ b>0)$.

28. Calcúlense los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}\,\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}$ $(m, n\in\mathbf{N})$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[4]{1+9x}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$; c) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\operatorname{sen}^4 3\sqrt{x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{ch}2x}{\ln\cos 3x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{3x}}{\operatorname{sen}(x^2/2)-\operatorname{sen} x}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(\sqrt[n]{a}-1)$; $(a>0)$; g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\operatorname{ch}(\pi/n)}{\cos(\pi/n)}\right)^{n^2}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{2x^2-1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$;

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{sen}^n\left(\frac{2\pi n}{3n+1}\right)$; l) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$;

m) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$.

29. Calcúlense los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}^2(\pi\cdot 2^x)}{\ln\cos(\pi\cdot 2^x)}$; b) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\operatorname{sen}bx}$;

d) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$ $(a>0)$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$;

f) $\lim\limits_{n\to 0}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-1\right)^{1/\ln n^{-1}}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\operatorname{sen}\left(\ln\sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$; h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^a+\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right]^n$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\pi\sqrt{n^2+n})$;

k) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln\operatorname{ch}x)$.

30. Calcúlense los límites;

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/3}[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}]$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{\operatorname{sen}^2 2x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$; e) $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})$ $(a>0)$;

g) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln(e^{x^2}+2\sqrt{x})}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$; h) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[13]{x}-\sqrt[7]{x}}{\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x}}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\cos\left(2\pi\left(\frac{x}{x+1}\right)^a\right)\right]^{x^2}$;

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left[\frac{\pi-4}{4}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^a\right]$;

l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$;

m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$; n) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$.

Capítulo IV
Derivadas y diferenciales

§ 1. Derivada de una función. Reglas de derivación

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Definición de la derivada. Sea la función $y = f(x)$ definida en cierto entorno del punto x_0. La función del argumento Δx se llama *incremento* de esta función en el punto x_0:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

La razón entre los incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es una nueva función del argumento Δx.

DEFINICIÓN *Se llama* ***derivada*** *de una función* $y = f(x)$ *en el punto* x_0 *el* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *(si éste existe).*

La derivada de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 se denota con $f'(x_0)$ o $y'(x_0)$. La operación de hallar la derivada se llama *derivación (diferenciación)*.

2. Tabla de derivadas de las funciones elementales simples

I. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α es cualquier número).

II. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

III. $(\cos x)' = -\sin x$.

IV. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, en particular, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$.

V. $(a^x)' = a^x \ln a$, en particular, $(e^x)' = e^x$.

VI. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right)$.

VII. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$ $(x \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z})$.

VIII. $(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.

IX. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.

X. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

XI. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

XII. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

XIII. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

XIV. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

XV. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ $(x \neq 0)$.

3. Interpretación física de la derivada. La derivada $f'(x_0)$ es la velocidad con que varía la función $y = f(x)$ en el punto x_0 (con otras palabras, la velocidad con que se modifica la variable dependiente y respecto al cambio de la variable independiente x en el punto x_0). En particular, si x es el tiempo, $y = f(x)$, la coordenada de un punto en movimiento por una recta en el instante x, entonces $f'(x)_0$ es la velocidad instantánea del punto en el momento de tiempo x_0.

4. Interpretación geométrica de la derivada. Examinemos la gráfica de la función $y = f(x)$ (fig. 1). Los puntos M y N tienen las coordenadas siguientes: $M(x_0, f(x_0))$, $N(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. El ángulo entre la secante MN y el eje Ox designémoslo con $\varphi(\Delta x)$.

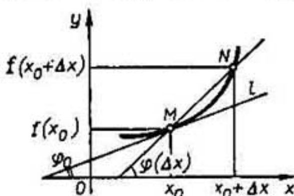


Fig. 1.

DEFINICIÓN *Si existe el* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$, *la recta l con el coeficiente angular* $k = \operatorname{tg} \varphi_0$, *que pasa a través del punto* $M(x_0, f(x_0))$, *se llama* ***tangente*** *a la gráfica de la función* $y = f(x)$ *en el punto M.*

Teorema 1. *Si la función* $y = f(x)$ *tiene en el punto* x_0 *la derivada* $f'(x_0)$, *la gráfica de la función tendrá en el punto* $M(x_0, f(x_0))$ *una tangente, con la particularidad de que* $f'(x_0)$ *será el coeficiente angular de la tangente, es decir, la ecuación de la tangente se escribirá en la forma*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Si la función $y = f(x)$ es continua en el punto x_0 y

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty,$$

se dice que la función tiene en el punto x_0 *una derivada infinita.* En este caso la tangente a la gráfica en el punto M_0 es paralela al eje Oy, siendo su ecuación: $x = x_0$.

5. Derivadas laterales. Si existe

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right),$$

éste se llama *derivada a la derecha* (*a la izquierda*) de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 y se denota $f'(x_0 + 0)$ [respectivamente $f'(x_0 - 0)$].

Si existen $f'(x_0 + 0)$ y $f'(x_0 - 0)$ y son iguales, existirá también $f'(x_0)$ y será igual a $f'(x_0 + 0)$. Inversamente: si existe $f'(x_0)$, existirán también $f'(x_0 + 0)$ y $f'(x_0 - 0)$, además $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0)$.

6. Reglas de derivación

Teorema 2. *Si* $u(x)$ *y* $v(x)$ *tienen derivadas en el punto* x_0, *la suma, la diferencia, el producto y el cociente de estas funciones (este*

último siempre que $v(x_0) \neq 0$) también tendrán derivadas en el punto x_0, además en el punto x_0 serán válidas las igualdades:

$$(u+v)' = u' + v'; \quad (u-v)' = u' - v';$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

7. Derivada de una función inversa

Teorema 3. *Si la función $y = f(x)$, estrictamente monótona y continua en cierto entorno del punto x_0, tiene derivada en el punto x_0 y $f'(x_0) \neq 0$, existe una función inversa $x = f^{-1}(y)$, la cual está definida en cierto entorno del punto $y_0 = f(x_0)$ y tiene derivada en el punto y_0, con la particularidad de que*

$$(f^{-1}(y_0))' = 1/f'(x_0). \tag{1}$$

La interpretación física de la fórmula (1) es: la derivada $(f^{-1}(y_0))'$ es la velocidad con que se modifica la variable x respecto al cambio de la variable y, y $f'(x_0)$ es la velocidad con que cambia la variable y respecto al cambio de la variable x. Está claro que estas magnitudes son mutuamente inversas.

8. Derivada de una función compuesta

Teorema 4. *Si la función $t = \varphi(x)$ tiene en el punto x_0 la derivada $\varphi'(x_0)$, y la función $y = \psi(t)$ tiene en el punto $t_0 = \varphi(x_0)$ la derivada $\psi'(t_0)$, también la función compuesta $y = \psi(\varphi(x)) \equiv f(x)$ tendrá derivada en el punto x_0, además*

$$f'(x_0) = \psi'(\varphi(x_0))\, \varphi'(x_0). \tag{2}$$

La interpretación física de la fórmula (2) es: la derivada $\varphi'(x_0)$ es la velocidad con que se modifica la variable t respecto al cambio de la variable x, en tanto que la derivada $\psi'(t_0)$ es la velocidad con que cambia la variable y respecto al cambio de la variable t. Está claro que la velocidad $f'(x_0)$ de modificación de la variable y respecto al cambio de la variable x es igual al producto de las velocidades $\psi'(t_0)$ y $\varphi'(x_0)$. (Si t se mueve con mayor rapidez que x k veces, e y con mayor velocidad que t l veces, entonces y se mueve más rápidamente que x kl veces.)

9. Derivada de una función dada en forma paramétrica. Supongamos las funciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{3}$$

están definidas en cierto intervalo de cambio de la variable t que denominaremos *parámetro*. Sea la función $x = \varphi(t)$ estrictamente monótona en este intervalo. Entonces existe una función inversa $t = \varphi^{-1}(x)$ que, poniéndola en la ecuación $y = \psi(t)$, obtenemos

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)) \equiv f(x).$$

De esta manera la variable y es una función compuesta de la variable x. La representación de la función $y = f(x)$ con ayuda de las ecuaciones (3) se llama *paramétrica*.

La ecuación (3) puede interpretarse como la dependencia de las coordenadas del punto que se mueve en el plano (x, y) respecto del tiempo t. En caso de semejante interpretación la gráfica de la función $y = f(x)$ es la trayectoria de un punto.

Si las funciones $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ tienen derivadas $\varphi'(t) \neq 0$ y $\psi'(t)$, la función $y = f(x)$ también tendrá derivada, además

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \tag{4}$$

Se debe advertir que la existencia de la derivada $\varphi'(t)$ con cierto signo determinado constituye la condición suficiente de la monotonía estricta de la función $x = \varphi(t)$ y, por consiguiente, de la existencia de la función $y = f(x)$ representada en forma paramétrica.

10. Derivada de la función vectorial. Si a cada valor de la variable $t \in T$ (T es cierto conjunto numérico) está puesto en correspondencia cierto vector $\mathbf{r}$, entonces se dice que en el conjunto T está determinada *la función vectorial* (*función vector*) $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

DEFINICIÓN *El vector* $\mathbf{a}$ *se llama* ***límite de la función vectorial*** $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ *en el punto* t_0, *si* $\lim\limits_{t \to t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = 0$.

DEFINICIÓN *Se llama* ***derivada de la función vectorial*** $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ *en el punto* t *el* $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t))$ (*si es que existe*).

La derivada de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ se designa con $\mathbf{r}'(t)$.

11. Interpretación física de la función vectorial y de su derivada. La posición del punto M en el espacio puede prefijarse mediante sus tres coordenadas o el vector $\mathbf{r} = \overline{OM}$, cuyo origen coincide con el origen de coordenadas y el extremo, con el punto M (fig. 2). Si el punto M se mueve, el vector $\mathbf{r}$ variará con el correr del tiempo t. Así, pues, el movimiento del punto puede describirse por medio de la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, donde t varía en cierto segmento $[a, b]$. El conjunto de los extremos de los vectores $\mathbf{r}(t)$ (donde $t \in [a, b]$) representa en sí la trayectoria de movimiento del punto [también se llama la *hodógrafa* de la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$]. La derivada $\mathbf{r}'(t)$ es el vector velocidad instantánea del punto en el instante t. El vector $\mathbf{r}'(t)$ está orientado por la tangente hacia la trayectoria.

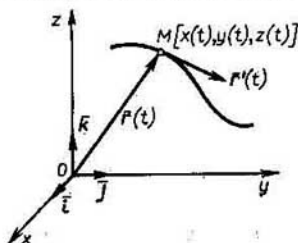


Fig. 2.

Si notamos con $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ las coordenadas del punto M en el instante de tiempo t y con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, los vectores unitarios de los ejes de coordenadas, la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ puede representarse en la forma siguiente

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t),$$

y la derivada $\mathbf{r}'(t)$, en la forma de

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i}x'(t) + \mathbf{j}y'(t) + \mathbf{k}z'(t).$$

De manera análoga el movimiento del punto M en el plano (x, y) puede describirse por la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t)$.

Si $x'(t)$ tiene un signo determinado, por ejemplo, $x'(t) > 0$, la trayectoria de movimiento del punto M será la gráfica de la función $y = f(x)$ dada mediante las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Las coordenadas del vector velocidad $\mathbf{r}'(t)$ son iguales a $x'(t)$ e $y'(t)$, mientras que la tangente del ángulo entre el vector $\mathbf{r}'(t)$ y el eje Ox, es decir, el coeficiente angular de la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ es igual a $y'(t)/x'(t)$ (fig. 3). De esta manera hemos obtenido de nuevo la expresión (4) para la derivada de la función representada en forma paramétrica.

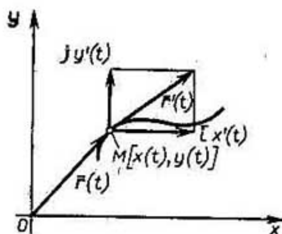


Fig. 3.

El vector $\mathbf{n}(t) = \{-y'(t), x'(t)\}$, cuando $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, es *el vector de la normal* a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $M(x(t), y(t))$, es decir, el vector director de la recta que pasa a través del punto M en forma perpendicular a la tangente hacia la gráfica en este punto (esta recta se llama *normal*).

II. Preguntas y tareas de control

1. ¿Qué se llama incremento de la función $y = f(x)$ en el punto x_0?
2. ¿De qué argumento depende la razón entre los incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$? ¿Cuál es el campo de definición de la función $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?
3. Dése la definición de la derivada de la función $y = f(x)$ en el punto x_0.
4. Utilizando la definición de la derivada, dedúzcanse las fórmulas para las derivadas de las funciones x^n (n es un número natural), $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\log x_a$, a^x.
5. ¿Qué interpretación física tiene la derivada de función $y = f(x)$ en el punto x_0? ¿Qué movimiento de un punto se describe mediante la ecuación $y = v_0x + y_0$ (x es el tiempo, v_0 e y_0 son constantes)?
6. ¿Qué interpretación geométrica tiene la derivada de la función $y = f(x)$ en el punto x_0? Dése la definición de la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ y escríbase la ecuación de la misma.

7. ¿Cuándo se dice que la función tiene en el punto x_0 una derivada infinita? Adúzcase un ejemplo de una función, cuya gráfica tiene en cierto punto la tangente vertical.
8. ¿Qué son las derivadas laterales de la función en un punto? ¿Qué relación existe entre las derivadas laterales y la derivada de la función en un punto? Adúzcase un ejemplo de una función, en la cual existen las derivadas laterales en cierto punto, pero no existe la derivada en este punto.
9. Dedúzcanse las fórmulas para las derivadas de la suma, diferencia, del producto y del cociente de dos funciones. Haciendo uso de aquéllas, dedúzcanse las fórmulas para las derivadas de las funciones $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$.
10. Enúnciese el teorema de la derivada de una función inversa. ¿Qué se puede decir acerca de la derivada de una función inversa, si están cumplidas todas las condiciones del teorema, a excepción de la condición $f'(x_0) \neq 0$ (es decir, se cumple la condición de $f'(x_0) = 0$)? Adúzcase un ejemplo de un caso semejante. ¿Qué interpretación física tiene la fórmula para la derivada de una función inversa? Valiéndose de esta fórmula, dedúzcanse las fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas inversas.
11. Enúnciese el teorema acerca de la derivada de una función compuesta. ¿Valdrá este teorema para la función $y = \operatorname{sen}^2(\sqrt[3]{x^2})$ en el punto $x = 0$? ¿Existe o no la derivada de esta función en el punto $x = 0$? ¿Qué interpretación física se le puede dar a la fórmula para la derivada de una función compuesta? Aprovechando esta fórmula, dedúzcase la fórmula para la derivada de la función x^α (α es un número cualquiera).
12. ¿En qué consiste la representación paramétrica de una función? ¿Bajo qué condiciones es válida la fórmula (4) para la derivada de una función dada en forma paramétrica?
13. ¿Qué es la función vectorial? Dése la definición del límite y de la derivada de una función vectorial. ¿Qué interpretación física tienen la función vectorial y su derivada?
14. Recurriendo a la definición de la derivada de una función vectorial, dedúzcase la fórmula $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i}x'(t) + \mathbf{j}y'(t) + \mathbf{k}z'(t)$.
15. ¿Cuáles son las coordenadas del vector unitario de la normal hacia la hodógrafa de la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t)$ en el punto $M(x(t), y(t))$?

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Valiéndose de la definición de la derivada, hallar la derivada de la función $y = x^3$ en el punto $x = 1$.

△ Encontremos el incremento de la función $y = x^3$ en el punto $x = 1$:

$$\Delta y = (1 + \Delta x)^3 - 1 = 3\,\Delta x + 3\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

De aquí obtenemos $\frac{\Delta y}{\Delta x}=3+3\Delta x+(\Delta x)^2$ y, por consiguiente, $y'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=3$. ▲

2. Comparar en el intervalo $0\leqslant t\leqslant 1$ las velocidades instantáneas y medias de dos puntos, cuyos movimientos rectilíneos vienen dados mediante las ecuaciones $s_1 = t^2$, $s_2 = 2t^4$ $(t\geqslant 0)$.

△ Encontremos las velocidades instantáneas de los puntos en el momento de tiempo t: $v_1(t) = s_1'(t) = 2t$; $v_2(t) = s_2'(t) = 8t^3$. De aquí obtenemos $v_1(0) = v_2(0)$; $v_1(1/2) = v_2(1/2)$; $v_1(t) > v_2(t)$, cuando $0 < t < 1/2$; $v_1(t) < v_2(t)$, cuando $t > 1/2$. La velocidad media del primer punto en el espacio de tiempo $0\leqslant t\leqslant 1$ es igual a

$$v_{1\,\text{med}}=\frac{s_1(1)-s_1(0)}{1}=1.$$

De manera análoga,

$v_{2\,\text{med}}=\frac{s_2(1)-s_2(0)}{1}=2$. Así pues, $v_{1\,\text{med}}<v_{2\,\text{med}}$. ▲

3. Anotar la ecuación de la tangente hacia la gráfica de la función $y = \cos x$ en el punto con abscisa $x = \pi/6$.

△ Tenemos $x_0 = \pi/6$, $f(x_0) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $f'(x_0) = -\operatorname{sen}(\pi/6) = -1/2$. Por eso la ecuación buscada de la tangente se escribirá en forma de

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right). \ ▲$$

4. Hallar las derivadas laterales de la función $f(x) = |x - x_0|\, g(x)$ en el punto x_0, donde $g(x)$ es una función continua en el punto x_0. ¿Tendrá la función $f(x)$ alguna derivada en el punto x_0?

△ Cuando $\Delta x > 0$, el incremento de la función en el punto x_0 tiene la forma

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)= \\ =|x_0+\Delta x-x_0|\,g(x_0+\Delta x)-0=g(x_0+\Delta x)\,\Delta x,$$

de donde $\frac{\Delta y}{\Delta x}=g(x_0+\Delta x)$. Puesto que $g(x)$ es continua en el punto x_0, tendremos $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=g(x_0)$. Así pues, $f'(x_0+0)=g(x_0)$.

De manera análoga, cuando $\Delta x < 0$, obtenemos $\Delta y = -g(x_0 + \Delta x)\,\Delta x$, de donde

$$\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}(-g(x_0+\Delta x))=-g(x_0),$$

es decir, $f'(x_0-0)=-g(x_0)$.

Si $g(x_0)\neq 0$, resulta que $f'(x_0+0)\neq f'(x_0-0)$ y, por consiguiente, la función $f(x)$ no tiene derivada en el punto x_0. Pero si $g(x_0) = 0$, entonces $f'(x_0+0) = f'(x_0-0) = 0$ y, por lo

tanto, la función $f(x)$ tiene derivada en el punto x_0, con la particularidad de que $f'(x_0) = 0$. ▲

5. Calcular la derivada de la función:

a) $y = \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{\ln x}$ $(x > 0,\ x \neq 1)$; b) $y = \cos(2^x - x^3)$ $(-\infty < x < \infty)$.

△ a) A partir de las reglas de derivación del producto y del cociente, así como de la tabla de derivadas, obtenemos

$$y'(x) = \frac{(x^2 \operatorname{sen} x)' \ln x - x^2 \operatorname{sen} x (\ln x)'}{\ln^2 x} =$$

$$= \frac{(x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x) \ln x - x^2 \operatorname{sen} x \frac{1}{x}}{\ln^2 x} =$$

$$= \frac{x (x \cos x + 2 \operatorname{sen} x) \ln x - x \operatorname{sen} x}{\ln^2 x} \quad (x > 0,\ x \neq 1).$$

b) La función $y = \cos(2^x - x^3)$ puede representarse en forma de $y = \cos t$, donde $t = 2^x - x^3$. Valiéndonos de la regla de derivación de una función compuesta, obtenemos

$$y'(x) = (\cos t)' \,|_{t=2^x-x^3} (2^x - x^3)' =$$

$$= -\operatorname{sen}(2^x - x^3)(2^x \ln 2 - 3x^2) \quad (-\infty < x < \infty). \ ▲$$

6. Hallar la derivada $y'(x)$ de la función

$$y = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{cuando } x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando } x = 0 \end{cases}$$

e investigar, si $y'(x)$ es continua en el punto $x = 0$.

△ Cuando $x \neq 0$, la derivada $y'(x)$ puede encontrarse mediante la derivación de la función $x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ según la regla de derivación del producto. Esto da

$$y'(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x) \quad (x \neq 0).$$

La expresión obtenida no está definida para $x = 0$. Esto no significa, sin embargo, que $y'(0)$ no existe, puesto que la expresión para $y'(x)$ se ha obtenido a condición de que $x \neq 0$. Para encontrar $y'(0)$ utilicemos de la definición de la derivada. El incremento Δy de la función $y(x)$ en el punto $x = 0$ es igual a $(\Delta x)^2 \operatorname{sen}(1/\Delta x)$, por eso

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \operatorname{sen} \frac{1}{\Delta x} = 0, \text{ es decir, } y'(0) = 0.$$

De este modo $y'(x)$ existe en todos los puntos:

$$y'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x) & \text{cuando } x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando } x = 0. \end{cases}$$

Para investigar la continuidad de $y'(x)$ en el punto $x = 0$, examinemos $\lim_{x \to 0} y'(x)$. Está claro que $\lim_{x \to 0} 2x \operatorname{sen}(1/x) = 0$, en

tanto que $\lim\limits_{x \to 0} \cos(1/x)$ no existe. Por eso tampoco existe $\lim\limits_{x \to 0} y'(x)$. Así, pues, $y'(x)$ es discontinua en el punto $x = 0$, siendo éste un punto de discontinuidad de II especie de la función $y'(x)$. ▲

7. Demostrar que las ecuaciones $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ representan en forma paramétrica cierta función $y = f(x)$. Hallar la derivada $f'(x)$ de esta función.

△ La función $x = \cos t$ es estrictamente monótona (decreciente) en el segmento $0 \leqslant t \leqslant \pi$ y, por consiguiente, tiene la inversa. Introduciendo esta función inversa en la ecuación $y = \operatorname{sen} t$, obtenemos la función de forma $y = f(x)$. En el caso dado la función inversa se encuentra en forma explícita: $t = \arccos x$ y por eso para $f(x)$ obtenemos la expresión $f(x) = \operatorname{sen}(\arccos x)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$. Esta función puede escribirse en la forma siguiente: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ (explíquese por qué). Calculemos la derivada $f'(x)$ mediante dos procedimientos: a) recurriendo a la expresión explícita; b) utilizando la fórmula para la derivada de la función representada en forma paramétrica. Tendremos:

a) $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$;

b) $f'(x) = \dfrac{\cos t}{-\operatorname{sen} t}$ $(t \neq 0,\ t \neq \pi)$.

Ya que $\cos t = x$, $\operatorname{sen} t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-x^2}$, cuando $0 \leqslant t \leqslant \pi$, de la segunda expresión para $f'(x)$ obtenemos la primera:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x_2}} \quad (x \neq \pm 1 \text{ ó } -1 < x < 1). \ ▲$$

8. Demostrar que si las funciones vectoriales $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ tienen derivadas, entonces para la derivada del producto escalar $(\mathbf{r}_1(t)\, \mathbf{r}_2(t))$ es válida la fórmula

$$(\mathbf{r}_1(t)\, \mathbf{r}_2(t))' = (\mathbf{r}_1'(t)\, \mathbf{r}_2(t)) + (\mathbf{r}_1(t)\, \mathbf{r}_2'(t)).$$

△ Sea $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{i}x_1(t) + \mathbf{j}y_1(t) + \mathbf{k}z_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{i}x_2(t) + \mathbf{j}y_2(t) + \mathbf{k}z_2(t)$. Entonces $(\mathbf{r}_1(t)\, \mathbf{r}_2(t)) = x_1(t)\, x_2(t) + y_1(t)\, y_2(t) + z_1(t)\, z_2(t)$. Aprovechemos el hecho de que, si $\mathbf{r}_i(t)$ $(i = 1, 2)$ tiene derivada, también $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$ tienen derivadas, además $\mathbf{r}_i'(t) = \mathbf{i}x_i'(t) + \mathbf{j}y_i'(t) + \mathbf{k}z_i'(t)$ (véase el ejer. 20). Obtenemos

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}_1(t)\, \mathbf{r}_2'(t))' &= x_1'(t)\, x_2(t) + x_1(t)\, x_3'(t) + \\ &+ y_1'(t)\, y_2(t) + y_1(t)\, y_2'(t) + z_1'(t)\, z_2(t) + z_1(t)\, z_2'(t) = \\ &= \{x_1'(t)\, x_2(t) + y_1'(t)\, y_2(t) + z_1'(t)\, z_2(t)\} + \{x_1(t)\, x_2'(t) + \\ &+ y_1(t)\, y_2'(t) + z_1(t)\, z_2'(t)\} = (\mathbf{r}_1'(t)\, \mathbf{r}_2(t)) + (\mathbf{r}_1(t)\, \mathbf{r}_2'(t)). \ ▲\end{aligned}$$

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

1. Escríbase la expresión para $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$ y hállese el campo de definición de la función Δy, si: a) $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, $x_0 = 1/2$; b) $f(x) = \arccos x$, $x_0 = 0$; c) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 2$; d) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = 2\pi$.

2. Utilizando la definición de la derivada, hállese la derivada de la función: a) $y = x$ en el punto $x = 1$; b) $y = x^2$ en el punto $x = x_0$; c) $y = \sqrt{x}$ en el punto $x = 4$; d) $y = x\,|x|$ en el punto $x = 0$;

$$\text{e) } y = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{cuando } x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando } x = 0 \end{cases} \quad \text{en el punto } x = 0.$$

3. Las ecuaciones del movimiento rectilíneo de dos puntos tienen la forma siguiente: a) $s_1 = t$, $s_2 = t^2$ $(t \geqslant 0)$; b) $s_1 = t^2$, $s_2 = t^3$ $(t \geqslant 0)$; c) $s_1 = \ln t$, $s_2 = \sqrt{t}$ $(t \geqslant 1)$ (t es el tiempo, s_1 y s_2 son las distancias recorridas por los puntos primero y segundo en el tiempo t). Compárense las velocidades instantáneas de estos dos puntos, así como sus velocidades medias en los intervalos de tiempo $0 \leqslant t \leqslant 1$ y $1 \leqslant t \leqslant 2$ para los casos a) y b) y en los intervalos $1 \leqslant t \leqslant 4$ y $1 \leqslant t \leqslant 25$ para el caso c).

4. Anótese la ecuación de la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto con abscisa x_0, si: a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = 0$; b) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$; c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$; d) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$.

5. Hállese el punto de intersección de las tangentes a la gráfica de la función $y = f(x)$ en los puntos con abscisas x_1 y x_2, si: a) $f(x) = \cos x$, $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/2$; b) $f(x) = e^x$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; c) $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2$.

6. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ que pasan a través del punto $(2, 3/2)$.

7. Hállense las derivadas laterales $f'(x_0 + 0)$ y $f'(x_0 - 0)$ y compárenlas, si:

a) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$; b) $f(x) = |x|$, $x_0 = 1$; c) $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$, $x_0 = 0$; d) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x}$, $x_0 = 0$; e) $f(x) = |x| \operatorname{sen} x$, $x_0 = 0$;

f) $f(x) = \left| x - \dfrac{\pi}{2} \right| \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$; g) $f(x) = |x - 1|\, e^x$, $x_0 = 1$.

¿Existe en cada caso la derivada $f'(x_0)$?

8. Hállese $y'(x)$, si: a) $y = x^2$; b) $y = \sqrt{x}$; c) $y = 1/x$; d) $y = 2\sqrt[3]{x^2} - 3/\sqrt{x}$; e) $y = \log_2 x^3 + \log_3 x^2$ (calcúlese $y'(1)$); f) $y = 2^x + (1/2)^x$; g) $y = \operatorname{sen} x - \cos x$ (calcúlense $y'(0)$ e $y'(\pi/4)$); h) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$; i) $y = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$ (explíquese el resultado obtenido); k) $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$ (explíquese el resultado obtenido).

9. Demuéstrese que, si $u(x)$ y $v(x)$ tienen derivadas en el punto x y $u(x) > 0$, la función $[u(x)]^{v(x)}$ también tiene derivada en el punto x, además

$$[u(x)^{v(x)}]' = v(x)\,u(x)^{v(x)-1}u'(x) + u(x)^{v(x)} \ln u(x)\, v'(x).$$

10. Hállese $y'(x)$, si (para todos los casos $a > 0$):

a) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; $y = \sqrt{x^2-a^2}$; $y = x\sqrt[3]{x^2+1}$;

b) $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; $y = \text{sen}^2(\cos x) + \cos^2(\text{sen}\, x)$;

c) $y = \text{sen}\,[\text{sen}\,(\text{sen}\, x)]$; $y = \dfrac{\text{tg}\, x}{\text{ctg}\, 2x}$; $y = 2^{\cos x + \text{tg}\, x}$;

d) $y = e^x \,\text{sen}\, x$; $y = e^{x^2} \cos 2x$; $y = e^{e^x} + x^{e^x}$;

e) $y = x^x$; $y = \ln[\ln(\ln x)]$; $y = \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{x-a}{x+a}$;

f) $y = \ln|x|$; $y = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$; $y = \ln \text{sen}\, x$;

g) $y = \text{sen}\,(\ln x)$; $y = \text{arcsen}\, \dfrac{x}{a}$; $y = \dfrac{1}{a} \text{arctg}\, \dfrac{x}{a}$;

h) $y = \text{arctg}\, \dfrac{1+x}{1-x}$ (compárese con la derivada de la función $y = \text{arctg}\, x$ y explíquese el resultado);

i) $y = \arccos(1/x)$; $y = \text{arcsen}\,(\text{sen}\, x)$; $y = \text{arctg}\,(\text{tg}\, x)$;

k) $y = \text{sen}\,(\text{arcsen}\, x)$; $y = \text{ctg}\,(\text{arcctg}\, x)$;

l) $y = \ln \dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \dfrac{a}{b} \text{arctg}\, \dfrac{x}{b}$; $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2} \text{arcsen}\, \dfrac{x}{a}$;

m) $y = \dfrac{\arccos x}{x} + \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$; $y = \text{arctg}\sqrt{x^2-1} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$;

n) $y = \dfrac{\text{arcsen}\, x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1-x}{1+x}$; $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$; o) $y = \text{arctg}\,(x + \sqrt{1+x^2})$, $y = (\text{sen}\, x)^{\cos x}$, $y = \text{sh}\,(\text{tg}\, x)$; $y = \text{th}\,(\cos x)$;

p) $y = \ln(\text{sh}\, x)$, $y = \lg(\text{ch}\, x)$, $y = \text{arctg}\,(\text{th}\, x)$; $y = \ln\left(\text{cth}\, \dfrac{x}{2}\right)$.

11. Se conoce que $\varphi(x)$, $\psi(x)$ y $f(x)$ tienen derivadas. Hállese $y'(x)$, si:

a) $y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$;

b) $y = \log_{\varphi(x)} \psi(x)$ $(0 < \varphi(x),\ \varphi(x) \neq 1,\ \psi(x) > 0)$;

c) $y = f(x^2) + f(x^{-2})$; c) $y = f(x))$.

12. Demuéstrese (aplicando el método de inducción matemática) que, si $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ tienen derivadas en el punto x, la suma $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$ y el producto $f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)$ también tienen derivadas en el punto x, con la particularidad de que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right)' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x); \quad (f_1(x) f_2(x) \ldots$$

$$\ldots f_n(x))' = \sum_{i=1}^{n} f_1(x) \ldots f_i'(x) \ldots f_n(x).$$

13. Demuéstrese que tiene lugar la regla siguiente de derivación de los determinantes de n-ésimo orden:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{k1}(x) & \dots & f_{kn}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f'_{k1}(x) & \dots & f'_{kn}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

14. ¿Será posible aplicar la regla de derivación del producto de dos funciones $u(x)$ y $v(x)$ en el punto x_0, si:

a) $u(x) = x$, $v(x) = |x|$, $x_0 = 0$;

b) $u(x) = x$, $v(x) = |x|$, $x_0 = 1$;

c) $u(x) = \text{sen}\, x$, $v(x) = \text{sgn}\, x$, $x_0 = 1$;

d) $u(x) = x^2$, $v(x) = \text{sgn}\, x$, $x = 0$;

e) $u(x) = x^3$, $v(x) = \begin{cases} \text{sen}\,(1/x) & \text{cuando } x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$?

¿Existirá en cada caso la derivada del producto $u(x)\, v(x)$ en el punto x_0?

15. ¿Son ciertas las afirmaciones siguientes:

I. «Si $u(x)$ tiene derivada en el punto x_0 y $v(x)$ no la tiene en dicho punto, resulta que: a) $u(x) + v(x)$ no tiene derivada en el punto x_0; b) $u(x)\, v(x)$ tampoco tiene derivada en ese mismo punto»?

II. «Si $u(x)$ y $v(x)$ no tienen derivadas en el punto x_0, podemos decir que: a) $u(x) + v(x)$ no tiene derivada en el punto x_0; b) $u(x)\, v(x)$ tampoco tiene derivada en dicho punto»?

(Si la afirmación no es cierta, adúzcase el correspondiente ejemplo.)

16. ¿Es cierta la afirmación de que: «Si $f(x) < g(x)$, tendremos que $f'(x) < g'(x)$»?

17. Obténganse las fórmulas para las sumas:

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1},$$
$$Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots + n^2x^{n-1}.$$

18. Represéntese la trayectoria de un punto, cuyo movimiento en el plano (x, y) viene dado por las ecuaciones:

a) $x = t$, $y = t^2$, $-\infty < t < \infty$; b) $x = \cos^2 t$, $y = \text{sen}^2\, t$, $0 \leqslant t < \infty$;

c) $x = a \cos t$, $y = b\, \text{sen}\, t$, $0 \leqslant t < \infty$;

d) $x = a\, \text{ch}\, t$, $y = b\, \text{sh}\, t$, $-\infty < t < \infty$;

e) $x = a\,(t - \text{sen}\, t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$, $-\infty < t < \infty$;

f) $x = e^t$, $y = e^{2t}$, $-\infty < t < \infty$.

En cada uno de los casos indíquese el intervalo de variación del parámetro t, para el cual las ecuaciones determinan la función $y = f(x)$, y hállese la derivada de esta función con la fórmula (4). En los casos a), b), c), d), f) exprésese $f(x)$ en forma explícita y compárese la expresión explícita para $f'(x)$ con la expresión obtenida de

acuerdo con la fórmula (4). En los casos c) y d) anótense las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva en el punto $t = 0$.

19. Sean $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t)$ y $\mathbf{a} = \mathbf{i}a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3$ un vector constante. Demuéstrese la afirmación siguiente: "Para que $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$, es necesario y suficiente que $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a_1$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = a_2$, $\lim\limits_{t\to t_0} z(t) = a_3$".

20. Empleando el resultado del problema anterior, demuéstrese la afirmación siguiente: «Para que la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t)$ tenga la derivada $\mathbf{r}'(t)$ en el punto t, es necesario y suficiente que las funciones escalares $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ tengan derivadas en el punto t. Además $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i}x'(t) + \mathbf{j}y'(t) + \mathbf{k}z'(t)$».

21. Demuéstrese que para las funciones vectoriales tienen lugar las reglas de derivación siguientes:

$$(\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t),$$
$$(f(t)\,\mathbf{r}(t))' = f'(t)\,\mathbf{r}(t) + f(t)\,\mathbf{r}'(t),$$
$$[\mathbf{r}_1(t)\,\mathbf{r}_2(t)]' = [\mathbf{r}_1'(t)\,\mathbf{r}_2(t)] + [(\mathbf{r}_1(t)\,\mathbf{r}_2'(t)],$$

donde $[\mathbf{r}_1(t)\,\mathbf{r}_2(t)]$ es el producto vectorial de los vectores $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$.

22. El movimiento del punto en el espacio se da mediante las ecuaciones

a) $x = t,\ y = t,\ z = t^2,\ t \geqslant 0$;

b) $x = R\cos t,\ \ y = R\,\mathrm{sen}\,t,\ \ z = ht,\ \ t \geqslant 0,\ \ R > 0,\ \ h > 0$ (línea helicoidal o hélice circular);

c) $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ t \geqslant 0$;

d) $x = \ln t,\ y = t^2/2,\ z = \sqrt{2}t,\ t \geqslant 1$.

Encuéntrense el módulo y los cosenos directores del vector velocidad en el instante: a) $t = 2$; b) $t = \pi$; c) $t = 1$; d) $t = 2{,}5$.

§ 2. Diferencial de una función

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Diferenciabilidad de una función

DEFINICIÓN. *La función $y = f(x)$ se llama **derivable (diferenciable)** en el punto x_0, si su incremento $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ en este punto puede representarse en forma de*

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha\,\Delta x, \tag{1}$$

donde A es cierto número y α, la función del argumento Δx, infinitamente pequeña y continua en el punto $\Delta x = 0$ (es decir, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = \alpha(0) = 0$).

Teorema 5. *Para que la función $y = f(x)$ sea derivable en el punto x_0, es necesario y suficiente que exista la derivada $f'(x_0)$.*

Cabe advertir que $A = f'(x_0)$.

La función del argumento Δx se llama *diferencial* (o *diferencial de primer orden*) de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 (diferenciable en este punto): $dy = f'(x_0)\,\Delta x$.

Cuando $f'(x_0) \neq 0$, la diferencial es la parte principal (lineal respecto a Δx) del incremento de la función en el punto x_0.

El incremento de la variable x se llama *diferencial de esta variable independiente*: $dx = \Delta x$. De esta manera, la diferencial de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 tiene la forma

$$dy = f'(x_0)\,dx, \tag{2}$$

de donde

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx},$$

es decir, *la derivada de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 es igual a la razón entre la diferencial de la función en este punto y la diferencial de la variable independiente.*

2. Interpretaciones geométrica y física de la diferencial. La interpretación geométrica de la diferencial de una función se comprende sin dificultad al examinar la fig. 4, en la cual vienen representadas la gráfica de la función $y = f(x)$ (línea gruesa) y la tangente MP a la gráfica en el punto $M(x_0, f(x_0))$. La diferencial dy es igual al incremento de la función lineal, cuya gráfica es la tangente MP.

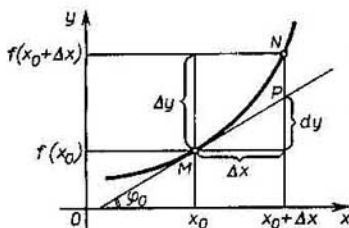


Fig. 4.

Si x es el tiempo e $y = f(x)$, la coordenada del punto sobre la recta en el instante x, la diferencial $dy = f'(x_0)\,\Delta x$ es igual a la variación de la coordenada que obtendría el punto en el tiempo Δx, si la velocidad del punto en el intervalo de tiempo $[x_0, x_0 + \Delta x]$ fuese constante e igual a $f'(x_0)$. La variación de la velocidad en este intervalo conduce a que, hablando en general, $\Delta y \neq dy$. Sin embargo, en intervalos pequeños de tiempo Δx la variación de la velocidad es insignificante y $\Delta y \cong dy = f'(x_0)\,\Delta x$.

3. Invariancia de la forma de la diferencial de primer orden. Supongamos que el argumento x de la función $y = f(x)$, derivable en el punto x_0, es no la variable independiente, sino que es una función de cierta variable independiente t: $x = \varphi(t)$, además $x_0 = \varphi(t_0)$, y $\varphi(t)$ es diferenciable en el punto t_0. Entonces la diferencial de la función $y = f(x)$ lo mismo que antes tiene la forma (2): $dy = f'(x_0)\,dx$, pero ahora dx es un incremento no arbitrario del argumento x (como en el caso, cuando x es la variable independiente), sino que es la diferencial de la función $x = \varphi(t)$ en el punto t_0, es decir, $dx = \varphi'(t_0)\,dt$. Esta propiedad [conservación de la fórmula (2) incluso

en aquel caso, en que $x = \varphi(t)$] se llama *invariancia de la forma de la diferencial de primer orden.*

4. Empleo de la diferencial para cálculos aproximados. Puesto que $\Delta y \cong dy$ para pequeños Δx, es decir, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cong$ $\cong f'(x_0)\Delta x$, tendremos que

$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{3}$$

Esta fórmula permite hallar los valores aproximados de $f(x_0 + \Delta x)$ para pequeños Δx, si se conocen $f(x_0)$ y $f'(x_0)$. Además el error al sustituir $f(x_0 + \Delta x)$ por el segundo miembro de la fórmula (3) será tanto menor, cuanto menor sea Δx, es más, este error para $\Delta x \to 0$ es una infinitésima de orden superior que Δx.

II. Preguntas y tareas de control

1. Dése la definición de la diferenciabilidad de la función en el punto dado.
2. Demuéstrese el teorema de enlace entre la diferenciabilidad de la función en un punto y la existencia de la derivada en este mismo punto.
3. ¿Qué es la diferencial de una función en el punto dado? ¿De qué argumento depende?
4. ¿Puede la diferencial de una función en el punto dado ser una magnitud constante?
5. ¿Para qué funciones la diferencial es igual al incremento de la función? Adúzcanse ejemplos.
6. ¿Qué interpretación geométrica tiene la diferencial?
7. ¿Qué interpretación física tiene la diferencial?
8. ¿Qué se entiende por el concepto de invariancia de la forma de la diferencial de primer orden? Demuéstrese que la forma de la diferencial de primer orden es invariante.
9. ¿Cómo puede emplearse la diferencial de una función para realizar cálculos aproximados?

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Hallar la diferencial de la función $y = x^2 - x + 3$ en el punto $x = 2$ mediante dos procedimientos: a) separando la parte lineal Δy respecto a Δx; b) según la fórmula (2).

△ a) $\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = [(2 + \Delta x)^2 - (2 + \Delta x) +$ $+ 3] - [2^2 - 2 + 3] = 3\Delta x + (\Delta x)^2$. De aquí se deduce que $dy =$ $= 3\Delta x$.

b) $f'(x) = 2x - 1$, $f'(2) = 3$. Por consiguiente, según la fórmula (2) obtenemos $dy = 3dx = 3\Delta x$. ▲

2. Hallar la diferencial de la función $y = \operatorname{sen}(x^2)$: a) en el punto $x = x_0$; b) en el punto $x = \sqrt{\pi}$; c) en el punto $x = \sqrt{\pi}$ cuando $dx = -2$.

△ a) Según la fórmula (2), $dy|_{x=x_0}=f'(x_0)\,dx=\cos(x_0^2)\,2x_0\,dx$.

b) Haciendo en la última igualdad $x_0=\sqrt{\pi}$, obtenemos $dy|_{x=\sqrt{\pi}}=-2\sqrt{\pi}\,dx$.

c) Tenemos $dy\Big|_{\substack{x=\sqrt{\pi}\\ dx=-2}}=4\sqrt{\pi}$. ▲

3. Sustituyendo el incremento de la función por su diferencial, hallar el valor aproximado de: a) $\sqrt{0{,}98}$; b) sen 31°.

△ a) Examinemos la función $y(x)=\sqrt{1+x}$. Puesto que $y(0)=1$, $y(-0{,}02)=\sqrt{0{,}98}$, $y'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$, $y'(0)=\frac{1}{2}$, resulta que según la fórmula (3) obtenemos $y=(-0{,}02)\approx y(0)+ y'(0)(-0{,}02)=1-0{,}01=0{,}99$. Así, pues, $\sqrt{0{,}98}\approx 0{,}99$.

b) Examinemos la función $y=\operatorname{sen} x$. Puesto que $y(30°)=\operatorname{sen} 30°=1/2$, $y'(30°)=\cos 30°=\sqrt{3}/2$. $1°=2\pi/360$ (radián) $\cong 0{,}0175$ (radián), entonces según la fórmula (3) obtenemos

$$\operatorname{sen} 31° \cong \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\pi}{360}\cong 0{,}5151. \ ▲$$

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

23. Represéntese en la forma (1) el incremento de la función: a) $y=e^x$ en el punto $x=0$; b) $y=\operatorname{sen} x$ en el punto $x=\pi/2$; c) $y=\operatorname{arctg} x$ en el punto $x=0$. Escríbase la expresión para la función $\alpha(\Delta x)$.

24. Hállense el incremento y la diferencial de la función $y=x^3-x^2+1$ en el punto $x=1$ y calcúlense sus valores para a) $\Delta x=0{,}01$; b) $\Delta x=0{,}1$; c) $\Delta x=1$; d) $\Delta x=3$.

25. El movimiento rectilíneo del punto está dado mediante la ecuación $p=2t^2+t+1$, donde t se expresa en segundos y p, en metros. Hállense el incremento y la diferencial del recorrido p en el instante $t=1$ s y compárenlos para: a) $\Delta t=0{,}1$ s; b) $\Delta t=0{,}2$ s; c) $\Delta t=1$ s.

26. Hállese la diferencial de la función y en el punto x, si:

a) $y=\sqrt{x}$; b) $y=1/x$; c) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$;

d) $y=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$; e) $y=\arcsen\frac{x}{a}$; f) $y=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$;

g) $y=xe^{2x}$; h) $y=x\operatorname{sen} x+\cos x$.

27. Hállense $dy|_{x=0}$ y $dy|_{x=1}$, si:

a) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x$; b) $y=\ln(1+x)$; c) $y=e^x$;

d) $y=\operatorname{sen}(\pi x/2)$; e) $y=\cos(\pi x/2)$.

28. Trácese la gráfica de la función $y=\ln(1+x)$ y represéntese en la gráfica dy para: a) $x=0$, $dx=1$; b) $x=1$, $dx=1$; c) $x=1$, $dx=2$.

29. Sea $y = \operatorname{sen} x$, donde $x = \cos t$. ¿Cuáles de las igualdades siguientes son válidas: a) $dy|_{t=\pi/2} = 0$; b) $dy|_{t=\pi/2} = dx$; c) $dy|_{t=\pi/2} = -dt$?

30. Utilizando la fórmula (3) y eligiendo el valor apropiado de x_0, hállense los valores aproximados de: a) cos 151°; b) arcsen 0,49; c) log 11; d) $\sqrt[3]{1,01}$; e) arctg 1,1; f) $e^{0,2}$.

31. Demuéstrese la fórmula aproximada (para x pequeños)

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a > 0).$$

Con ayuda de esta fórmula hállense los valores aproximados de: a) $\sqrt[3]{9}$; b) $\sqrt[4]{255}$; c) $\sqrt[7]{130}$.

§ 3. Derivadas y diferenciales de órdenes superiores

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Definición de las derivadas de órdenes superiores. Si la derivada $f'(x)$ de una función $y = f(x)$ está definida en cierto entorno del punto x_0 y tiene en este punto otra derivada, esta última de $f'(x)$ se llama *derivada segunda* (o *derivada de segundo orden*) de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 y se denota mediante uno de los símbolos siguientes: $f''(x_0)$, $f^{(2)}(x_0)$, $y''(x_0)$, $y^{(2)}(x_0)$.

La derivada tercera se determina como la derivada de la derivada segunda, etc. Si ya está introducido el concepto de la derivada del orden $(n-1)$ y si la derivada del orden $(n-1)$ tiene derivada en el punto x_0, dicha derivada se llama *derivada n-ésima* (o *derivada de n-ésimo orden*) de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 y se designa con $f^{(n)}(x_0)$ o $y^{(n)}(x_0)$.

De esta manera las derivadas de órdenes superiores se definen por inducción con la fórmula

$$y^{(n)}(x) = [y^{(n-1)}(x)]'.$$

La función que tiene derivada de n-ésimo orden en el punto x_0, se llama *diferenciable n veces* en este punto. La función que tiene en el punto x_0 derivadas de todos los órdenes se llama *infinitamente diferenciable* en este punto.

Las derivadas de órdenes superiores de la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ también se introducen por inducción:

$$\mathbf{r}^{(n)}(t) = [\mathbf{r}^{(n-1)}(t)]'.$$

Si $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t)$, tenemos $\mathbf{r}^{(n)}(t) = \mathbf{i}x^{(n)}(t) + \mathbf{j}y^{(n)}(t) + \mathbf{k}z^{(n)}(t)$.

Si la función $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ describe el movimiento de un punto (t es el tiempo), resulta que la derivada segunda $\mathbf{r}''(t)$ es el vector aceleración en el instante t.

2. Reglas principales para calcular las derivadas de n-ésimo orden

1. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$.

2. FÓRMULA DE LEIBNIZ:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}, \text{ donde } u^{(0)} = u,$$

$$v^{(0)} = v, \quad C_n^i = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}, \quad 0! = 1.$$

3. Fórmulas para las derivadas de n-ésimo orden de algunas funciones:

1. $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}$ ($x > 0$, α es cualquier número).

2. $(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$ $(0 < a \neq 1)$; en particular, $(e^x)^{(n)} = e^x$.

3. $(\operatorname{sen} x)^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

4. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

4. Diferenciales de órdenes superiores. Supongamos que x es una variable independiente y la función $y = f(x)$ es diferenciable en cierto entorno del punto x_0. La diferencial de primer orden $dy = f'(x)\,dx$ es la función de dos variables: x y dx. *La diferencial de segundo orden (diferencial segunda)* d^2y de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 se define como la diferencial de la función $dy = f'(x)\,dx$ en el punto x_0 bajo las condiciones siguientes: 1[a]) dy se considera como función sólo de la variable independiente x (con otras palabras, al hallar la diferencial de $f'(x)\,dx$ hay que calcular la diferencial de $f'(x)$, considerando dx como un factor constante); 2[a]) el incremento de la variable independiente x al hallar la diferencial de $f'(x)$ se considera igual al incremento inicial del argumento, es decir, a aquel mismo valor de dx que figura como factor en la expresión $dy = f'(x)\,dx$.

Utilizando esta definición, obtenemos

$$d^2y\,|_{x=x_0} = d(dy)\,|_{x=x_0} = d\,[f'(x)]\,|_{x=x_0}\,dx = \\ = \{[f'(x)]'\,|_{x=x_0}\,dx\}\,dx = f''(x_0)\,(dx)^2,$$

o (escribiendo $(dx)^2$ en forma dx^2)

$$d^2y\,|_{x=x_0} = f''(x_0)\,dx^2.$$

La diferencial de n-ésimo orden arbitrario de la función $y = f(x)$ se define por inducción según la fórmula

$$d^n y = d\,(d^{n-1}y)$$

bajo las mismas dos condiciones que la diferencial de segundo orden. En este caso es válida la fórmula

$$d^n y\,|_{x=x_0} = f^{(n)}(x_0)\,dx^n \quad (dx^n = (dx)^n), \tag{1}$$

de donde

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n y}{dx^n}. \tag{2}$$

Si x es una variable no independiente, sino que la función de alguna variable t, entonces la fórmulas (1) y (2) comienzan a ser incorrectas (la no invariancia de la forma de las diferenciales de órdenes superiores). En particular, cuando $n = 2$, tenemos

$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x.$$

II. Preguntas y tareas de control

1. Dése la definición de la derivada segunda de la función $y = f(x)$ en el punto x_0.
2. ¿Puede existir la derivada segunda $f''(x_0)$, si no existe la derivada primera $f'(x_0)$?
3. Adúzcase un ejemplo de una función, para la cual existe $f'(x_0)$, pero no existe $f''(x_0)$.
4. Dése la definición de la derivada n-ésima de la función $y = f(x)$ en el punto x_0.
5. Se conoce que existe la derivada de n-ésimo orden de una función en el punto x_0. ¿Qué se puede decir acerca de la existencia de las derivadas de orden inferior en el punto x_0 y en el entorno de este punto?
6. Dése la definición de la derivada de n-ésimo orden de la función vectorial. ¿Qué interpretación física se le puede dar a la derivada segunda de una función vectorial que describe el movimiento del punto?
7. Aplicando el método de inducción matemática, demuéstrese la regla para encontrar la derivada de n-ésimo orden de la suma y de la diferencia de dos funciones.
8. Obténgase la fórmula de Leibniz.
9. Dedúzcanse las fórmulas para las derivadas de n-ésimo orden de las funciones x^α, a^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\ln x$.
10. Demuéstrese que, si $f(x)$ es derivable n veces, tendremos

$$\frac{d^n f(ax+b)}{dx^n} = a^n f^{(n)}(t)\,\big|_{t=ax+b}.$$

11. Calcúlense las derivadas de n-ésimo orden: $(e^{5x})^{(n)}$, $(\operatorname{sen}(3x+$ $+2))^{(n)}$, $(\sqrt{1-x})^{(n)}$.
12. Dése la definición de la diferencial de n-ésimo orden de la función $y = f(x)$ en el punto x_0.
13. Demuéstrese la validez de la fórmula (1) para la diferencial de n-ésimo orden en el caso, en que x es una variable independiente.
14. ¿Será válida la fórmula (1), si x es la función de cierta variable? Dedúzcanse en este caso las fórmulas para d^2y y d^3y. Demuéstrese que la fórmula (1) sigue siendo justa, si x es una función lineal de la variable independiente t, es decir, $x = at + b$ (a y b son números).

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Hallar $y^{(10)}$, si $y = x^2 e^{3x}$.

△ La función dada es el producto de dos funciones: x^2 y e^{3x}. Aplicando la fórmula de Leibniz, obtenemos

$$(x^2e^{3x})^{(10)} = x^2 (e^{3x})^{(10)} + \\ + C_{10}^1(x^2)' (e^{3x})^{(9)} + C_{10}^2(x^2)^{(2)} (e^{3x})^{(8)} + \dots \\ \dots + (x^2)^{(10)} e^{3x}.$$

Puesto que $(x^2)^{(n)} = 0$ cuando $n \geqslant 3$ y $(e^{3x})^{(k)} = e^{3x}3^k$, resulta que $(x^2e^{3x})^{10} = x^2e^{3x}3^{10} + 10\cdot 2xe^{3x}\, 3^9 + 45\cdot 2e^{3x}3^8 = 3^9e^{3x}(3x^2 + 20x + 30)$. ▲

El ejemplo examinado muestra que conviene emplear la fórmula de Leibniz en aquellos casos, en que uno de los factores es un polinomio con potencia p no alta. En este caso todos los términos de la fórmula de Leibniz, empezando con el $(p + 2)$-ésimo, son nulos.

2. Hallar la derivada n-ésima de la función $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

△ La función dada puede representarse en forma de $y = 1 + \frac{2}{x^2-1}$. Por eso $y^{(n)} = 1^{(n)} + \left(\frac{2}{x^2-1}\right)^{(n)} = \left(\frac{2}{x^2-1}\right)^{(n)}$. A su vez $\frac{2}{x^2-1}$ puede desarrollarse en fracciones simples:

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

Por consiguiente,

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}.$$

Calculemos sucesivamente las derivadas primera, segunda y tercera de la función $\frac{1}{x-1}$:

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)' = [(x-1)^{-1}]' = -1\cdot(x-1)^{-2},$$

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(2)} = (-1)(-2)(x-1)^{-3} = (-1)^2\cdot 2!\,(x-1)^{-3},$$

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(3)} = (-1)^2\cdot 2!\,(-3)(x-1)^{-4} = (-1)^3\cdot 3!\,(x-1)^{-4}.$$

Luego por inducción resulta fácil demostrar que

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = (-1)^n n!\,(x-1)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

De forma análoga

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

Así, pues,

$$y^{(n)} = (-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]. \quad ▲$$

3. La función $y = f(x)$ está dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x = a\cos t$, $y = a\,\text{sen}\,t$, $0 < t < \pi$. Hallar $f''(x)$.

$\triangle$ Deduzcamos la fórmula para la derivada segunda de la función $y = f(x)$ dada en forma paramétrica por las ecuaciones $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, considerando que las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son dos veces derivables y $\varphi'(t) \neq 0$.

En virtud de la invariancia de la forma que tiene diferencial primera $\mathrm{d}f'(x) = f''(x)\,\mathrm{d}x$, de donde $f''(x) = \dfrac{\mathrm{d}f'(x)}{\mathrm{d}x}$. Ya que $f'(x) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, resulta que $\mathrm{d}f'(x) = \left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'\mathrm{d}t$. Tomando en consideración que $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, obtenemos

$$f''(x) = \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)' \frac{1}{\varphi'(t)}\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)} = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \qquad (3)$$

Suponiendo en esta fórmula $\psi = a\,\text{sen}\,t$, $\varphi = a\cos t$, $\varphi^{-1}(x) = \arccos(x/a)$, obtenemos

$$f''(x) = -\frac{1}{a\,\text{sen}^3 t}\bigg|_{t=\arccos(x/a)} = -\frac{1}{a\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}} = -\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}.$$

En el ejemplo dado se puede hallar la expresión explícita para $f(x)$: $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ $(-a < x < a)$. Calculando $f''(x)$, obtenemos, por supuesto, la misma expresión que con la fórmula (3). ▲

4. El movimiento de un punto en el espacio se describe mediante las ecuaciones $x = R\cos t$, $y = R\,\text{sen}\,t$, $z = ht^2/2$, $t \geqslant 0$. Hallar los módulos de los vectores velocidad y aceleración en el instante $t = 1$.

$\triangle$ Con ayuda de la función vectorial el movimiento puede describirse con la ecuación

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}R\cos t + \mathbf{j}R\,\text{sen}\,t + \mathbf{k}ht^2/2, \quad t \geqslant 0.$$

Derivando, encontramos

$$\mathbf{r}'(t) = -\mathbf{i}R\,\text{sen}\,t + \mathbf{j}R\cos t + \mathbf{k}ht \text{ (velocidad)};$$

$$\mathbf{r}''(t) = -\mathbf{i}R\cos t - \mathbf{j}R\,\text{sen}\,t + \mathbf{k}h \text{ (aceleración)}.$$

De aquí obtenemos $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{R^2+h^2t^2}$, $|\mathbf{r}'(1)| = \sqrt{R^2+h^2}$, $|\mathbf{r}''(t)| = \sqrt{R^2+h^2}$ (el valor absoluto de la aceleración permanece constante). ▲

5. Hallar la diferencial segunda de la función $y = \cos 2x$, si: a) x es la variable independiente; b) $x = \varphi(t)$, donde $\varphi(t)$ es una función dos veces diferenciable de la variable independiente t.

$\triangle$ a) $\mathrm{d}^2y = y''(x)(\mathrm{d}x)^2 = -4\cos 2x\,(\mathrm{d}x)^2$;

b) $\mathrm{d}^2y = y''(x)(\mathrm{d}x)^2 + y'(x)\,\mathrm{d}^2x = -4\cos(2\varphi(t))(\varphi'(t)\,\mathrm{d}t)^2 - 2\,\text{sen}\,(2\varphi(t))\,\varphi''(t)(\mathrm{d}t)^2 = -2\,[2\cos(2\varphi(t))\,\varphi'^2(t) + \text{sen}\,(2\varphi(t))\,\varphi''(t)]\,(\mathrm{d}t)^2$. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

32. Hállense las derivadas del orden indicado:

a) $(e^{-x^2})^{(3)}$; b) $(\operatorname{sen} ax)^{(10)}$; c) $(e^{kx})^{(4)}$;

d) $(f(x^2))^{(3)}$; e) $(f(e^x))^{(2)}$; f) $(f(\varphi(x)))^{(3)}$;

g) $(\sqrt{x})^{(10)}$; h) $\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^{(6)}$; i) $(x^2 \operatorname{sen} 2x)^{(20)}$;

k) $(x^3 \cos 5x)^{(15)}$; l) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{(8)}$; m) $\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{(30)}$;

n) $(xe^{5x})^{(11)}$; o) $(\ln 3x)^{(10)}$.

33. Hállese $y^{(n)}$, si:

a) $y=\sqrt{ax+b}$; b) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$; c) $y=\operatorname{sen}^2 x$;

d) $y = \cos^2 x$; e) $y = \operatorname{sen}^3 x$; f) $y = \cos^3 x$;

g) $y = \operatorname{sen} \alpha x \operatorname{sen} \beta x$; h) $y = \cos \alpha x \cos \beta x$; i) $y = x \operatorname{sen} ax$;

k) $y = x^2 \cos ax$; l) $y = (ax^2 + bx + c)\, e^{kx}$;

m) $y=\ln\frac{ax+b}{ax-b}$; n) $y=x \operatorname{sh} x$; o) $y=x^2 \operatorname{ch} x$;

p) $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ (a_i son números).

34. Para las funciones del ejer. 18, dadas en forma paramétrica, hállense $f''(x)$ y $f'''(x)$.

35. Exprésense las derivadas de la función inversa $x = f^{-1}(y)$, hasta el tercer orden inclusive, a través de las derivadas de la función $y = f(x)$.

36. El movimiento de un punto en el espacio se describe mediante las ecuaciones del ejer. 22. Hállense el módulo y los cosenos directores del vector aceleración en los instantes indicados.

37. Hállense las diferenciales del orden indicado, si x es la variable independiente: a) $d^3(x^3)$; b) $d^4(\sqrt{x-1})$; c) $d^5(x \ln x)$; d) $d^{10}(x \operatorname{sen} x)$.

38. Hállese d^ny, si: a) $y = \operatorname{sh} x$; b) $y = \operatorname{ch}(ax)$; c) $y = x^2 \ln x$.

39. En cada uno de los casos siguientes compruébese que la función $y(x)$ satisfaga la ecuación correspondiente (C_i son números arbitrarios):

a) $y = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx$, $y'' + k^2y = 0$;

b) $y = C_1e^{kx} + C_2e^{-kx}$, $y'' - k^2y = 0$;

c) $y = e^{-\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)$, $y'' + 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2)\, y = 0$;

d) $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + C_3e^x + C_4e^{-x}$, $y^{(4)} - y = 0$.

40. Hállese $f^{(n)}(x_0)$, si $f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$, donde $\varphi(x)$ tiene la derivada continua de $(n - 1)$-ésimo orden en el punto x_0.

41. Demuéstrese que la función $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{cuando } x\neq 0, \\ 0 & \text{cuando } x=0 \end{cases}$ es infinitamente diferenciable en el punto $x=0$.

Capítulo V
Integral indefinida

§ 1. Función primitiva e integral indefinida

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Definición de la función primitiva y de la integral indefinida

DEFINICIÓN. *Una función $F(x)$ se llama **primitiva** para la función $f(x)$ en el intervalo X, si $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X$.*

Teorema 1. *Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son dos funciones primitivas* (o, simplemente, *primitivas*) *cualesquiera para $f(x)$ en X, entonces $F_1(x) - F_2(x) = C =$* const.

COROLARIO. *Si $F(x)$ es una de las primitivas para $f(x)$ en X, cualquiera otra primitiva $\Phi(x)$ para la función $f(x)$ en X tiene la forma $\Phi(x) = F(x) + C$, donde C es cierta constante.*

DEFINICIÓN. *El conjunto de todas las primitivas para la función $f(x)$ en X se llama **integral indefinida** de la función $f(x)$ en el intervalo X y se designa con $\int f(x)\,dx$.*

En virtud del corolario del teorema 1 $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, donde $F(x)$ es una de las primitivas para $f(x)$ y C, una constante arbitraria.

(A veces con el símbolo $\int f(x)\,dx$ se denota no todo el conjunto de primitivas, sino que alguna de éstas.)

2. Propiedades fundamentales de la integral indefinida

1ª. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

2ª. $\int dF(x) = F(x) + C$.

3ª. LINEALIDAD DE LA INTEGRAL. Si existen primitivas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, en tanto que α y β son cualesquiera números reales, existirá también la primitiva de la función $\alpha f(x) + \beta g(x)$, además

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$$

II. Preguntas y tareas de control

1. Dése la definición de la primitiva para la función $f(x)$ en el intervalo X.
2. Cítense ejemplos de las funciones que tienen primitivas.
3. Adúzcanse ejemplos de dos primitivas diferentes para una misma función $f(x)$.

4. ¿Acaso toda función tiene la primitiva? Examínese el ejemplo siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ cuando } x>0, \\ -2 \text{ cuando } x\leqslant 0. \end{cases}$$

5. Hállese la primitiva para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, la cual en el punto $x = \pi/2$ toma el valor igual a 10.
6. Se conoce que dos primitivas para la función $f(x) = e^x$ en el punto $x = 1$ difieren en 2. ¿En cuánto diferirán estas mismas primitivas en el punto $x = 100$?
7. ¿La gráfica de qué primitiva para la función $f(x) = 1/(1 + x^2)$ corta el punto con coordenadas $(1, 2\pi)$?

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Demostrar que la función

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1 \text{ cuando } x>0, \\ 0 \text{ cuando } x=0, \\ -1 \text{ cuando } x<0 \end{cases}$$

tiene la primitiva en cualquier intervalo que no contiene el punto $x = 0$ y no la tiene en todo intervalo que contenga dicho punto.

△ En todo intervalo que no contiene el punto $x = 0$, la función $\operatorname{sgn} x$ es constante. Por ejemplo, en el segmento $[1, 2]$ $\operatorname{sgn} x = 1$ y cualquier primitiva para la función $\operatorname{sgn} x$ en este segmento posee la forma $F(x) = x + C$, donde C es cierta constante.

Examinemos ahora un intervalo que contiene el punto $x = 0$, por ejemplo, el segmento $[-1, 3]$. En el semisegmento $[-1, 0)$ toda primitiva para la función $\operatorname{sgn} x$ tiene la forma $-x + C_1$, mientras que en el semisegmento $(0, 3]$ la primitiva para $\operatorname{sgn} x$ es igual a $x + C_2$. Sea cual sea la elección de las constantes arbitrarias C_1 y C_2 obtenemos en el segmento $[-1, 3]$ una función que no tiene derivada en el punto $x = 0$. Si elegimos $C_1 = C_2$, obtendremos la función continua $y = |x| + C$ $(C = C_1 = C_2)$, que tampoco será diferenciable en el punto $x = 0$. De esta manera la función $\operatorname{sgn} x$ no tiene primitiva en el segmento $[-1, 3]$.

El ejemplo examinado muestra que el problema acerca de existencia de la primitiva para la función está ligado sustancialmente con aquel intervalo, en el cual se considera esta función. ▲

2. Un ejemplo físico importante de la primitiva da el problema de restablecimiento de la ley de movimiento rectilíneo de un punto material a partir de la velocidad prefijada. La velocidad instantánea $v(t)$ es la derivada de la función $s(t)$ que determina la ley de movimiento de un punto material. Por eso la búsqueda de la función $s(t)$ por la velocidad prefijada $v(t)$ se reduce al cálculo de la primi-

tiva para la función $v(t)$. Toda primitiva para $v(t)$ tiene la forma

$$s(t)=\int v(t)\,dt+C.$$

La constante C se determina de acuerdo con las condiciones adicionales. Supongamos, por ejemplo, que $v(t) = a(t - t_0) + v_0$ (movimiento con aceleración a = const), $s(t_0) = s_0$. Entonces $s(t) = \frac{a(t-t_0)^2}{2} + v_0(t - t_0) + C$. A partir de la condición adicional $s(t_0) = s_0$ encontramos $C = s_0$, por eso

$$s(t)=\frac{a(t-t_0)^2}{2}+v_0(t-t_0)+s_0.$$

§ 2. Integrales indefinidas inmediatas

1. Tabla de las principales integrales indefinidas

I. $\int 0\,dx=C.$

II. $\int 1\,dx=x+C.$

III. $\int x^\alpha\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ \ (\alpha\neq-1).$

IV. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C\ \ (x\neq 0).$

V. $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\ \ (0<a\neq 1),\quad \int e^x\,dx=e^x+C.$

VI. $\int \operatorname{sen} x\,dx=-\cos x+C.$

VII. $\int \cos x\,dx=\operatorname{sen} x+C.$

VIII. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C\ \left(x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\right).$

IX. $\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C\ \ (x\neq\pi n,\ n\in\mathbf{Z}).$

X. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsen x+C,\\ -\arccos x+C\end{cases}\ (-1<x<1).$

XI. $\int\frac{dx}{1+x^2}=\begin{cases}\operatorname{arctg} x+C,\\ -\operatorname{arcctg} x+C.\end{cases}$

XII. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm1}\right|+C.$

XIII. $\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$

XIV. $\int \operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{ch} x+C.$

XV. $\int \operatorname{ch} x\,dx=\operatorname{sh} x+C.$

XVI. $\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th} x+C.$

XVII. $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C.$

II. Ejemplos de resolución de problemas

Las siguientes integrales se reducen a las de la tabla mediante la transformación idéntica de la expresión integrando:

1. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} + C.$

2. $\int (x^4+1)\,x^3\,dx = \frac{1}{4}\int (x^4+1)\,d\,(x^4+1) = \frac{1}{8}\int d\,(x^4+1)^2 =$
$= \frac{1}{8}(x^4+1)^2 + C.$

3. $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^2} = \int \frac{(x^2-1)+1}{1-x^2}\,dx = \int \left(-1+\frac{1}{1-x^2}\right) dx =$
$= -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$

4. $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \int [(1+\mathrm{tg}^2 x)-1]\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right) dx =$
$= \mathrm{tg}\,x - x + C.$

5. $\int \frac{2x+3}{3x+2}\,dx = \int \frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{5}{6}\right]}{\left(x+\frac{2}{3}\right)}\,dx =$
$= \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}\ln\left|x+\frac{2}{3}\right| + C.$

6. $\int \sqrt{1-\mathrm{sen}\,2x}\,dx = \int \sqrt{\mathrm{sen}^2 x - 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x + \cos^2 x}\,dx =$
$= \int \sqrt{(\mathrm{sen}\,x-\cos x)^2}\,dx = \int |\cos x - \mathrm{sen}\,x|\,dx = (\mathrm{sen}\,x + \cos x)\times$
$\times\,\mathrm{sgn}\,(\cos x - \mathrm{sen}\,x) + C.$

III. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

Hállense los integrales:

1. $\int (3-x^2)^3\,dx.$ 2. $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx.$

3. $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\,dx.$ 4. $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx.$

5. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,dx.$ 6. $\int \mathrm{th}^2 x\,dx.$

7. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$ 8. $\int (2^x+3^x)^2\,dx.$

9. $\int \sqrt{1+\mathrm{sen}\,2x}\,dx.$ 10. $\int (2x-3)^{10}\,dx.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}.$ 12. $\int \frac{dx}{2+3x^2}.$ 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$

14. $\int \frac{dx}{\mathrm{sen}^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}.$ 15. $\int \frac{dx}{1+\cos x}.$

16. $\int \frac{dx}{1+\mathrm{sen}\,x}.$

§ 3. Método de sustitución de la variable

I. Conceptos y teoremas fundamentales

Teorema 2. *Supongamos que la función $x = \varphi(t)$ está definida y es diferenciable en el intervalo T, mientras que el intervalo X es el conjunto de sus valores. Sea además que la función $y = f(x)$ está definida en X y tiene en este intervalo la primitiva $F(x)$. Entonces en el intervalo T la función $F(\varphi(t))$ es la primitiva para la función $f(\varphi(t)) \times \times \varphi'(t)$.*

Del teorema 2 se deduce que

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C, \tag{1}$$

y, puesto que, $F(\varphi(t)) + C = (F(x) + C)\,|_{x=\varphi(t)} = \int f(x)\,dx\,|_{x=\varphi(t)}$, resulta que la igualdad (1) puede escribirse en la forma de

$$\int f(x)\,dx\,|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{2}$$

La igualdad (2) se llama FÓRMULA DE SUSTITUCIÓN DE LA VARIABLE en la integral indefinida.

Si la función $x = \varphi(t)$ tiene función inversa $t = \varphi^{-1}(x)$, entonces de la igualdad (2) se desprende

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \tag{3}$$

Esta fórmula es la fórmula fundamental «de trabajo» al calcular la integral $\int f(x)\,dx$, aplicando el método de sustitución de la variable.

II. Preguntas y tareas de control

1. Escríbase la fórmula (2) de sustitución de la variable en la integral indefinida. ¿Bajo qué condiciones esta fórmula es válida?
2. ¿Qué condición deberá cumplirse para que de la fórmula (2) se deduzca la fórmula (3)?
3. Se requiere hallar la $\int \sqrt{4 - x^2}\,dx$ para $-2 \leqslant x \leqslant 2$. ¿Será admisible para este objetivo la sustitución de la variable: a) $x = \operatorname{sen} t$, $-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2$; b) $x = 2 \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$; c) $x = 2 \operatorname{sen} t$, $-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2$; d) $x = 2 \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$; e) $x = 2 \cos t$, $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$?

III. Ejemplos de resolución de problemas

Examinemos algunos procedimientos empleados para calcular las integrales con ayuda de la sustitución de la variable.

1°. Transformación idéntica de la expresión integrando, separando la diferencial de la nueva variable de integración (sustitución elemental de la variable).

1. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\,(x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\,(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=$

$$=-\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}\,(1-x^2)=-\frac{1}{2}\cdot 2\,(1-x^2)^{1/2}+C.$$

2. $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8-2}=\int \frac{\frac{1}{4}\,\mathrm{d}\,(x^4)}{(x^4)^2-2}=\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{d}\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)}{-2\left[1-\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)^2\right]}=$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x^4}{\sqrt{2}-x^4}\right|+C.$$

3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\int \frac{-\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}=$

$$=-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right|+C\;(x>0).$$

4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x}=\int \frac{\mathrm{d}\,(\ln\ln x)}{\ln\ln x}=\ln|\ln\ln x|+C.$

5. $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x=\int \frac{-\mathrm{d}\,(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$

6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}^2 x+2\cos^2 x}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\,(\operatorname{tg}^2 x+2)}=$

$$=\int \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)}{2\left[1+\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)^2\right]}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

2°. Algunas sustituciones.

1. $I=\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x$. Pongamos $t=(1-x)^{1/3}$, obtendremos $x=1-t^3$, $\mathrm{d}x=-3t^2\,\mathrm{d}t$. Ahora resulta que

$$I=\int (1-t^3)^2\,t\,(-3t^2)\,\mathrm{d}t=-3\int (1-t^3)^2\,t^3\,\mathrm{d}t=$$

$$=-3\int (t^3-2t^6+t^9)\,\mathrm{d}t=-3\left(\frac{t^4}{4}-\frac{2}{7}t^7+\frac{1}{10}t^{10}\right)+C,$$

donde $t=(1-x)^{1/3}$.

2. $I=\int x^5(2-5x^3)^{2/3}\,\mathrm{d}x$. Hagamos $t=2-5x^3$; entonces $x=\left(\frac{2-t}{5}\right)^{1/3}$, $\mathrm{d}t=-15x^2\,\mathrm{d}x$. Hallamos

$$I=\int \frac{1}{5}(2-t)\,t^{2/3}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{15}\right)=-\frac{1}{75}\int (2t^{2/3}-t^{5/3})\,\mathrm{d}t=$$

$$=-\frac{1}{75}\cdot 2\cdot\frac{3}{5}t^{5/3}+\frac{1}{75}\cdot\frac{3}{8}t^{8/3}+C,\ \text{donde } t=2-5x^3.$$

3. $I=\int \frac{\operatorname{sen} x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x\,[(\cos^2 x+1)-1]}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Pongamos $t=1+\cos^2 x$, de donde $dt=-2\cos x \operatorname{sen} x\, dx$. Esto significa que

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{t-1}{t}\,dt=-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\ln|t|+C,\ \text{donde}\ t=1+\cos^2 x.$$

3°. **Sustituciones trigonométricas, al integrar algunas funciones irracionales.**

1. $I=\int\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$. Hagamos $x=\operatorname{sen} t$, $-\pi/2<t<\pi/2$, tendremos $dx=\cos t\,dt$. Por consiguiente

$$I=\int\frac{\cos t\,dt}{\cos^3 t}=\operatorname{tg} t+C,\ \text{donde}\ t=\operatorname{arcsen} x.$$

2. $I=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$. Pongamos $x=a\operatorname{tg} t$, $-\pi/2<t<\pi/2$, de donde $dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}$. Por eso

$$I=\int\frac{a\cos^3 t\,dt}{a^3\cos^2 t}=\frac{1}{a^2}\operatorname{sen} t+C,\ \text{donde}\ t=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$$

3. $I=\int\frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$. Hagamos $x=1/\operatorname{sen} t$, $-\pi/2<t<0$ y $0<t<\pi/2$, entonces $dx=-\frac{\cos t\,dt}{\operatorname{sen}^2 t}$. De esta manera

$$I=\int\frac{-\cos t\,dt}{\operatorname{sen}^2 t\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}-1\right)^{3/2}}=-\int\frac{\operatorname{sen} t\,dt}{\cos^2 t}=$$

$$=\int\frac{d(\cos t)}{\cos^2 t}=-\frac{1}{\cos t}+C,\ \text{donde}\ t=\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

Separando la diferencial de la nueva variable, hállense las integrales:

17. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$. **18.** $\int\frac{x\,dx}{4+x^4}$.

19. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$. **20.** $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

21. $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$. • **22.** $\int xe^{-x^2}\,dx$.

23. $\int\frac{\ln^2 x}{x}\,dx$. **24.** $\int\operatorname{sen}^5 x\cos x\,dx$.

25. $\int\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x-\cos x}}\,dx$. **26.** $\int\frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}$.

• **27.** $\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x}$. **28.** $\int\frac{dx}{\operatorname{sh} x}$. **29.** $\int\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$.

30. $\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$.

Recurriendo a diferentes sustituciones, hállense las integrales:

31. $\int x^3(1-5x^2)^{10}\,dx$. 32. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

33. $\int \cos^5 x\sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$, 34. $\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x}$.

35. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. 36. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x}$.

37. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, 38. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$ (● $x=a\cos 2t$).

39. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$. 40. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx\left(● \; x=\frac{a}{\cos 2t}\right)$.

41. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$. 42. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

§ 4. Método de integración por partes

I. Conceptos y teoremas fundamentales

Teorema 3. *Supongamos que en el intervalo X las funciones $u(x)$ y $v(x)$ son diferenciables y existe la $\int v(x)\,u'(x)\,dx$, (es decir, la función $v(x)\,u'(x)$ tiene la primitiva en X). Entonces $\int u(x)\,v'(x)\,dx$ también existe en X y*

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx=u(x)\,v(x)-\int v(x)\,u'(x)\,dx.$$

Esta igualdad se llama FÓRMULA DE INTEGRACIÓN POR PARTES. Puesto que $u'(x)\,dx=du$, $v'(x)\,dx=dv$, tenemos que esta fórmula puede escribirse en la forma de

$$\int u\,dv=u(x)\,v(x)-\int v\,du.$$

El método de integración por partes resulta cómodo para emplearlo en los siguientes casos:

1. La expresión integrando contiene, en forma de factor, las funciones $\ln x$, $\ln\varphi(x)$, $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$. Si en calidad de $u(x)$ se eligen estas funciones, la expresión integrando $v\,du$ de la nueva integral, por lo común, resulta más simple que la de partida.

2. La función integrando tiene la forma de $P(x)\,e^{ax}$, $P(x)\operatorname{sen} ax$, $P(x)\cos ax$, donde $P(x)$ es un polinomio respecto a la variable x. Si como $u(x)$ se elige $P(x)$, tendremos que en la nueva integral la función integrando de nuevo pertenece a uno de los tipos indicados, pero el grado del polinomio resultará ya en una unidad menor. Eligiendo este polinomio de nuevo en calidad de $u(x)$, reducimos el grado en una unidad más, etc.

3. La función integrando tiene la forma e^{ax} sen bx, e^{ax} cos bx, sen $(\ln x)$, cos $(\ln x)$, etc. Después de la integración doble por partes se obtiene de nuevo la integral inicial con cierto coeficiente. La igualdad obtenida es una ecuación algebraica lineal respecto a la integral buscada.

II. Preguntas y tareas de control

1. Escríbase la fórmula de integración por partes de la integral indefinida. ¿Bajo qué condiciones esta fórmula es válida?
2. ¿Qué funciones son cómodas para integrar por partes?

III. Ejemplos de resolución de los problemas

1. $I = \int \operatorname{arctg} x \, dx$. Hagamos $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$. Entonces $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Por consiguiente,

$$I = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$
$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

2. $I = \int x^2 e^{-x} dx$. Pongamos $u = x^2$, $dv = e^{-x} dx$. Entonces $du = 2x\,dx$, $v = -e^{-x}$. Por consiguiente,

$$I = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} +$$
$$+ 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C.$$

3. $I = \int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$. Hagamos $u = \operatorname{sen}\ln x$, $dv = dx$. Entonces $du = \frac{1}{x}\cos\ln x\,dx$, $v = x$. Tenemos

$$I = x\operatorname{sen}\ln x - \int \cos\ln x\,dx = x\operatorname{sen}\ln x -$$
$$-\left(x\cos\ln x + \int \operatorname{sen}\ln x\,dx\right).$$

Hemos obtenido una ecuación lineal respecto a I

$$I = x(\operatorname{sen}\ln x - \cos\ln x) - I,$$

de donde encontramos

$$I = \frac{x}{2}(\operatorname{sen}\ln x - \cos\ln x) + C.$$

4. $K_\alpha = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$. Hagamos $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^\alpha}$, $dv = dx$. Entonces

$$K_\alpha = \frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} - \int x\, d\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^\alpha}\right) = \frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} + 2\alpha \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{\alpha+1}}\, dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} + 2\alpha\left[\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^\alpha} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\alpha+1}}\right] =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} + 2\alpha\,[K_\alpha - a^2 K_{\alpha+1}],$$

de donde

$$K_{\alpha+1} = \frac{1}{2\alpha a^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} + \frac{2\alpha-1}{2\alpha a^2} K_\alpha.$$

Hemos obtenido una fórmula recurrente, con ayuda de la cual $K_{\alpha+1}$ se expresa a través de K_α. Cuando $\alpha = 1$, la integral K_α es «casi» una integral inmediata:

$$K_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Haciendo en la fórmula recurrente $\alpha = 1$ y conociendo K_1, hallamos K_2. Poniendo $\alpha = 2$ y conociendo K_2, hallamos K_3, etc.

OBSERVACIÓN. Con ayuda de los métodos de sustitución de la variable y de integración por partes se obtienen las siguientes fórmulas de uso frecuente:

1. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$
2. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0).$
3. $\int \frac{x\,dx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|a^2 \pm x^2| + C.$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$
6. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C.$
7. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$
8. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

Hállense las integrales:

43. $\int \ln x\, dx$. **44.** $\int \sqrt{x} \ln^2 x\, dx$. **45.** $\int x^3 e^{-x^2} dx$.

46. $\int x^2 \operatorname{sen} 2x\, dx$. **47.** $\int \operatorname{arcsen} x\, dx$.

48. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2} dx$. **49.** $\int \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{tg} x)\, dx$.

50. $\int x(\operatorname{arctg} x)^2 dx$. **51.** $\int \frac{x \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

52. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx$. **53.** $\int \cos(\ln x)\, dx$.

54. $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx$. **55.** $\int e^{2x} \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

§ 5. Integración de funciones racionales

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Descomposición de una fracción racional en suma de fracciones simples. Examinemos una función racional (o una fracción racional) $P_n(x)/Q_m(x)$. Aquí $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son polinomios de grados n y m respecto a la variable x.

Si $n \geqslant m$, o sea, la fracción es impropia, ésta podrá representarse en la forma siguiente

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)} \quad (k < m)$$

o, como se dice, separar de ella la parte entera $P_{n-m}(x)$.

Como resultado la integración de una fracción racional impropia se reduce a la integración de la fracción propia $R_k(x)/Q_m(x)$.

Teorema 4. *Supongamos que $P_n(x)/Q_m(x)$ es una fracción racional propia $(n < m)$, y la descomposición de $Q_m(x)$ en el producto de los factores reales irreducibles tiene la forma*

$$Q_m(x) = (x-a)^\alpha \ldots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\gamma \ldots (x^2+rx+s)^\delta,$$

donde $a, \ldots, b$ son las raíces reales, $x^2+px+q, \ldots, x^2+rx+s$ son trinomios de segundo grado que no se descomponen en factores reales. Entonces

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{A_1}{x-a} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{M_\gamma x + N_\gamma}{(x^2+px+q)^\gamma} + \ldots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{K_\delta x + L_\delta}{(x^2+rx+s)^\delta} + \ldots + \frac{K_1 x + L_1}{x^2+rx+s}, \qquad (1)$$

donde $A_i, B_i, M_i, N_i, K_i, L_i$ son números reales.

Las fracciones que figuran en el segundo miembro (1), se llaman *simples* y la propia igualdad (1) se llama descomposición de una fracción racional propia $P_n(x)/Q_m(x)$ en suma de fracciones simples con coeficientes reales.

2. Integrabilidad de las fracciones simples reduciéndolas a funciones elementales. Cada una de las fracciones simples se integra, o sea, se reduce a funciones elementales:

1) $\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C;$

2) $\int \frac{B}{(x-a)^{\alpha}}\,dx = \frac{B}{1-\alpha}\,\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}} + C \quad (\alpha > 1);$

3) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) +$

$$+\frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C;$$

4) $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\alpha}}\,dx = \frac{M}{2(1-\alpha)}\,\frac{1}{(t^2+a^2)^{\alpha-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)K_{\alpha} \quad (\alpha > 1)$

donde

$$K_{\alpha} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{\alpha}}, \quad t = x + \frac{p}{2}, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

La integral K_{α} se calcula aplicando la fórmula recurrente (véase el § 4).

3. Procedimientos prácticos de descomposición de una fracción propia en suma de fracciones simples.

MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS. Examinemos este método en el ejemplo siguiente. La descomposición de una fracción propia $\frac{x}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)}$ en suma de fracciones simples de acuerdo con el teorema 4 tiene la forma

$$\frac{x}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Reduciendo al común denominador e igualando los numeradores de las fracciones obtenidas, llegamos a la igualdad

$$x = A(2x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + \\ + Cx(x+1)(2x-1) + D(x+1)(2x-1). \qquad (2)$$

Dos polinomios son idénticamente iguales sólo en caso de que sean iguales los coeficientes de cada una de las potencias iguales de x. Igualando los coeficientes, obtenemos un sistema de ecuaciones para determinar A, B, C y D:

para x^0: $-A + B - D = 0;$
para x^1: $2A + B - C + D = 1;$
para x^2: $-A + B + C + 2D = 0;$
para x^3: $2A + B + 2C = 0.$

Después de resolver este sistema hallamos los coeficientes A, B, C, D.

Semejante procedimiento general, incluso en el ejemplo con cuatro coeficientes indeterminados, conduce a un sistema de cálculo muy voluminoso.

En tanto que utilizando la identidad (2), podemos encontrar los coeficientes desconocidos de una manera más simple:

a) haciendo en (2) $x=\frac{1}{2}$, obtendremos $\frac{1}{2}=B\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}$, de donde $B=\frac{4}{15}$;

b) poniendo en (2) $x=-1$, obtendremos $-1=A\cdot(-3)\cdot 2$, de donde $A=\frac{1}{6}$;

c) haciendo en (2) $x=0$, obtendremos $0=-A+B-D$, de donde $D=B-A=\frac{1}{10}$;

d) comparando los coeficientes de x^3, obtendremos $0=2A+$ $+B+2C$, de donde $C=-\frac{1}{2}(2A+B)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{15}\right)=-\frac{3}{10}$.

MÉTODO DE ELIMINACIÓN. Expongamos un procedimiento útil para calcular algunos de los coeficientes indeterminados. Sea

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{P_n(x)}{(x-a)^{\alpha}\varphi(x)}, \text{ donde } \varphi(a)\neq 0,$$

es decir, el número real a es la raíz múltiple de orden α del polinomio $Q_m(x)$.

A la raíz múltiple real $x=a$ corresponde en la descomposición de la fracción $P_n(x)/Q_m(x)$ una cadena de fracciones simples:

$$\frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-a}.$$

Para hallar el coeficiente A_{α} del grado superior del denominador, es necesario en el denominador de la fracción inicial $\frac{P_n(x)}{(x-a)^{\alpha}\varphi(x)}$ eliminar $(x-a)^{\alpha}$ y en la fracción restante hacer $x=a$, es decir, $A_{\alpha}=\frac{P_n(a)}{\varphi(a)}$.

Este método resulta muy cómodo si todas las raíces del denominador son reales y simples. Entonces haciendo uso de este método pueden encontrarse todos los coeficientes indeterminados.

Por ejemplo:

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-2};$$

$$A=\left.\frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x-2)}\right|_{x=0}=1,$$

$$B=\left.\frac{x+2}{x(x+1)(x-2)}\right|_{x=1}=-\frac{3}{2}, \text{ etc.}$$

II. Preguntas y tareas de control

1. ¿Acaso toda fracción racional es reducible a funciones elementales?
2. ¿Por qué se investiga el problema de integración sólo de las fracciones propias?
3. ¿Qué significa «separar la parte entera de una fracción impropia»?
4. ¿En qué factores reales primos puede descomponerse un polinomio con coeficientes reales?
5. Se conoce que el número $2 - i$ es la raíz de un polinomio con coeficientes reales. ¿Será cierto que el número $2 + i$ es la raíz de ese mismo polinomio?
6. ¿En qué fracciones simples se descompone la fracción
$$\frac{x+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\ ?$$
7. ¿En qué consiste el método de coeficientes indeterminados al descomponer una fracción en la suma de fracciones simples?
8. ¿En qué consiste el método de eliminación al calcular los coeficientes indeterminados?
9. Hállense mediante el método de eliminación los coeficientes indeterminados en la descomposición de la fracción $\frac{x}{(x+2)(x-3)}$.
10. Hállense, aplicando el método de eliminación, los coeficientes indeterminados en la descomposición de la fracción $\frac{x^2}{(x^2-2)(x^2+3)}$. ● Hágase $x^2 = y$ y luego utilícese el método de eliminación.

III. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

Hállense las integrales:

56. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$. **57.** $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$.

58. $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$. **59.** $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\,dx$.

60. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$. **61.** $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

62. $\int \frac{dx}{x^4-1}$. **63.** $\int \frac{dx}{x^4+1}$. **64.** $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

65. $\int \frac{x^2\,dx}{x^4+3x^3+4{,}5x^2+3x+1}$. **66.** $\int \frac{dx}{x^6+1}$.

67. $\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^{100}}$. **68.** $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx$.

69. $\int \frac{x^{11}\,dx}{x^8+3x^4+2}$. **70.** $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,dx$.

71. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx$. **72.** $\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\,dx$.

73. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$.

§ 6. Integración de algunas funciones irracionales

I. Sustituciones fundamentales para racionalizar las integrales

En este párrafo y en los siguientes por medio de $R(x, y)$ se denota una función racional de dos argumentos x e y.

1. Integración de las irracionalidades lineales fraccionarias. La integral del tipo $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \left(\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}\right)$ se racionaliza, es decir, se reduce a la integral de una función racional, con ayuda de la sustitución

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

1. Sustituciones de Euler. El problema de integración en funciones elementales de las integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ $(a \neq 0)$ se resuelve con ayuda de las sustituciones de Euler que racionalizan las integrales de este tipo.

Si el trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ tiene raíces complejas (en este caso el signo de a coincide con el signo del trinomio que figura bajo el signo de raíz, es decir, $a > 0$), entonces se emplea *la primera sustitución de Euler*:

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}.$$

Si $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, donde x_1 y x_2 son raíces reales, entonces para racionalizar la integral se emplea *la segunda sustitución de Euler*:

$$t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}.$$

3. Otros procedimientos de integración de las irracionalidades cuadráticas. Las sustituciones de Euler, desempeñando un papel teórico importante, en la práctica conducen habitualmente a cálculos voluminosos, por lo que a ellas se recurre en casos excepcionales, cuando no se logra calcular de manera más simple la integral, aplicando otro procedimiento. Uno de esos procedimientos es el siguiente. Si en el trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ se separa el cuadrado perfecto, es decir, se logra reducirlo a la forma $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$ y hacer

$$t=\sqrt{\left|\frac{a}{c-\frac{b^2}{4a}}\right|}\left(x+\frac{b}{2a}\right),$$

resulta que la integral $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ se reduce a uno de los tres tipos siguientes:

$$\int R_1(t, \sqrt{1-t^2})\,dt, \quad \int R_2(t, \sqrt{t^2-1})\,dt, \quad \int R_3(t, \sqrt{1+t^2})\,dt.$$

Haciendo en la primera de estas integrales la sustitución $t = \operatorname{sen} u$; en la segunda, $1/t = \operatorname{sen} u$; en la tercera, $t = \operatorname{tg} u$, obtenemos las integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} u, \cos u)\,du$ (véase el § 7).

Examinemos un método más de cálculo de las integrales de tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ (sin emplear las sustituciones de Euler y las trigonométricas). Con este objetivo transformemos la función integrando, obteniendo una función de tipo especial.

Puesto que las potencias pares de la expresión $\sqrt{ax^2+bx+c}$ son polinomios, entonces la función $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ puede representarse en forma de

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = \frac{P(x)+Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}{S(x)+T(x)\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

donde P, Q, S y T son polinomios. Para suprimir la irracionalidad en el denominador, multipliquemos el numerador y el denominador de esta fracción por $S(x) - T(x)\sqrt{ax^2+bx+c}$. Obtendremos

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = \frac{A(x)+B(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}{C(x)} = \frac{A(x)}{C(x)} + \frac{B(x)(ax^2+bx+c)}{C(x)\sqrt{ax^2+bx+c}} = R_1(x) + \frac{R_2(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

donde A, B, y C son polinomios; $R_1(x)$ y $R_2(x)$, fracciones racionales.

El cálculo de la integral de $R_1(x)$ viene descrito en el § 5.

Separando en la fracción racional $R_2(x)$ la parte entera $P_n(x)$ y descomponiendo la fracción propia restante en suma de fracciones simples, llegaremos a los tres tipos siguientes de integrales

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{1}$$

$$\int \frac{dx}{(x-\beta)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{2}$$

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)^\alpha\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{3}$$

Estas integrales pueden calcularse de la siguiente manera.

1. Para la integral (1) es válida la fórmula

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{4}$$

donde $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de potencia $n-1$ y λ, cierto número. Para determinar los coeficientes $Q_{n-1}(x)$ y el número λ diferenciemos la identidad (4). Después de reducir al común denominador, obtenemos la igualdad de dos polinomios. Comparando los coeficientes de potencias iguales, hallamos los coeficientes desconocidos. La integral que figura en el segundo miembro de (4) se reduce a una integral de las expuestas en las tablas, formando un cuadrado perfecto en la expresión subradical.

2. La integral (2) se reduce a la integral de tipo (1) por medio de la sustitución $t = 1/(x-\beta)$.

3. La integral (3) en el caso en que

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{p}=\frac{c}{q}, \tag{5}$$

es decir, cuando los trinomios cuadrados coinciden con precisión de hasta el factor $(ax^2+bx+c=a(x^2+px+q),\ a>0)$, puede representarse en forma de suma de dos integrales

$$\frac{M}{2\sqrt{a}}\int\frac{(2x+p)\,\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^{\frac{2\alpha+1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^{\frac{2\alpha+1}{2}}}.$$

La primera de estas integrales se racionaliza mediante la sustitución $t=x^2+px+q$; la segunda, por medio de la sustitución

$$t=\left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'=\frac{2x+p}{2\sqrt{x^2+px+q}}.$$

Si las correlaciones (5) no se cumplen, entonces la integral (3) primero se reduce a la forma

$$\int\frac{P_{2m-1}(y)\,\mathrm{d}y}{(y^2+\gamma)^m\sqrt{ry^2+s}}\quad(\gamma>0). \tag{6}$$

De esta manera, si $\frac{a}{1}=\frac{b}{p}\neq\frac{c}{q}$, tendremos que el tipo (6) se obtiene mediante la sustitución $x=y-p/2$.

Si $\frac{a}{1}\neq\frac{b}{p}$, para reducir la integral (3) al tipo (6) se emplea la sustitución $x=\frac{\mu y+\nu}{y+1}$. Los coeficientes μ y ν se eligen de tal manera que los trinomios cuadrados obtenidos no contengan términos de primer grado respecto a y.

En la integral (6) la fracción $\frac{P_{2m-1}(y)}{(y^2+\gamma)^m}$ es propia y después de descomponerla en fracciones simples se obtienen las integrales de tipo

$$\int\frac{y\,\mathrm{d}y}{(y^2+\gamma)^k\sqrt{ry^2+s}}$$

y

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{(y^2+\gamma)^k\sqrt{ry^2+s}}. \tag{7}$$

La primera de ellas se racionaliza mediante la sustitución $t = \sqrt{ry^2 + s}$; la segunda, por medio de la sustitución

$$t = (\sqrt{ry^2+s})' = \frac{ry}{\sqrt{ry^2+s}}.$$

II. Preguntas y tareas de control

1. ¿Qué sustitución racionaliza la integral de una irracionalidad lineal fraccionaria?
2. ¿Qué tipo de integrales se calculan con ayuda de las sustituciones de Euler?
3. ¿Qué importancia teórica tienen las sustituciones de Euler?
4. ¿Con ayuda de qué sustituciones trigonométricas se calculan las integrales: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, $\int \sqrt{x^2-3}\,dx$, $\int \sqrt{x^2+3}\,dx$, $\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx$, $\int \sqrt{2+2x-x^2}\,dx$?

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. $I = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1}$. Hagamos $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$, de donde $dx = -\frac{6t^2\,dt}{(t^3-1)^2}$. Por consiguiente,

$$I = -3 \int \frac{dt}{t^3-1} = -\frac{1}{2} \ln \frac{(1-t)^2}{1+t+t^2} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+t}{\sqrt{3}} + C,$$

donde $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

2. $$I = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{5\sqrt{5}}{4\cdot 2}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2+\frac{3}{5}\right]\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2-1}}.$$ Hagamos $t = \frac{2x+1}{\sqrt{5}}$

entonces $\sqrt{5}\,dt = 2\,dx$ y, por consiguiente,

$$I = \frac{4}{5} \int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{5}\right)\sqrt{t^2-1}}.$$

Hagamos ahora $\frac{1}{t} = \operatorname{sen} u$, de donde $-\frac{dt}{t^2} = \cos u\,du$. Por eso

$$I = -\frac{4}{5} \int \frac{\cos u\,du\,\operatorname{sen} u}{\left(1+\frac{3}{5}\operatorname{sen}^2 u\right)\cos u} = -\frac{4}{5} \int \frac{\operatorname{sen} u\,du}{\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\cos^2 u} =$$

$$= -\frac{4}{3} \int \frac{d(\cos u)}{\frac{8}{3}-\cos^2 u} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{8}} \ln \left| \frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}\cos u}{\sqrt{8}-\sqrt{3}\cos u} \right| + C,$$

donde $u = \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{5}}{2x+1}$. Definitivamente obtenemos

$$I = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}} \right| + C.$$

3. Calculemos la integral del ejemplo 2 sin emplear la sustitución trigonométrica. La integral tiene la forma (3), donde $p = 1$, $q = 1$, $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$, es decir, están cumplidas las condiciones $\frac{a}{1} = \frac{b}{p} \neq \frac{c}{q}$.

Poniendo $x = y - \frac{1}{2}$, llegamos a la integral de tipo (7) $I = \int \frac{dy}{\left(y^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{y^2-\frac{5}{4}}}$, la cual se racionaliza mediante la sustitución

$$t = \left(\sqrt{y^2-\frac{5}{4}}\right)' = \frac{y}{\sqrt{y^2-\frac{5}{4}}}. \tag{8}$$

De la expresión (8) obtenemos $t^2\left(y^2-\frac{5}{4}\right) = y^2$, de donde

$$y^2+\frac{3}{4} = \frac{2t^2-\frac{3}{4}}{t^2-1}. \tag{9}$$

Escribiendo la fórmula (8) en forma de $t\sqrt{y^2-\frac{5}{4}} = y$ y derivándola, obtenemos $dt\sqrt{y^2-\frac{5}{4}} + t\left(\sqrt{y^2-\frac{5}{4}}\right)' dy = dy$ o, tomando en consideración (8), $dt\sqrt{y^2-\frac{5}{4}} + t \cdot t\, dy = dy$, de donde

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-\frac{5}{4}}} = \frac{dt}{1-t^2}. \tag{10}$$

Introduciendo las expresiones (9) y (10) en la integral I, tenemos

$$I = \int \frac{dt}{\frac{3}{4}-2t^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}+\sqrt{8}\,t}{\sqrt{3}-\sqrt{8}\,t} \right| + C, \text{ donde } t = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}},$$

es decir,

$$I = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}} \right| + C.$$

4. $I = \int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$. Hagamos $t = \frac{1}{x-1}$, entonces $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$ e $I = -\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$. Luego utilizamos la fórmula (1):

$$\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = (At+B)\sqrt{5t^2+5t+1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Diferenciando esta identidad, obtenemos

$$\frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}}=A\sqrt{5t^2+5t+1}+\frac{(At+B)(10t+5)}{2\sqrt{5t^2+5t+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Reduciendo al denominador común y comparando los coeficientes de potencias iguales de t, encontramos $A = 1/10$, $B = -3/20$, $\lambda = 11/40$. Acto seguido

$$\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{20}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}}\right|+C.$$

Definitivamente tenemos

$$I=-\left(\frac{1}{10}t-\frac{3}{20}\right)\sqrt{5t^2+5t+1}-$$

$$-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}}\right|+C,$$

donde $t=\frac{1}{x-1}$, o bien

$$I=\frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}-$$

$$-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|+C.$$

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

Hállense las integrales;

74. $\int\frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$. 75. $\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$.

76. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$. 77. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

78. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$. 79. $\int\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,dx$.

80. $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. 81. $\int\frac{x^{10}\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

82. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$. 83. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

84. $\int\frac{x^2\,dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

85. $\int\frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$.

86. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$.

87. $\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

88. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$. 89. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

90. $\int \frac{dx}{[1+\sqrt{x(1+x)}]^2}$. 91. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$.

92. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}$.

§ 7. Integración de funciones trigonométricas

I. Sustituciones fundamentales para racionalizar las integrales

La integral del tipo $\int R\,(\text{sen}\,x,\ \cos x)\,dx$ se racionaliza con ayuda de la sustitución trigonométrica universal $t = \text{tg}\,(x/2)$. En la práctica ésta conduce con frecuencia a cálculos muy voluminosos. En una serie de casos son más cómodas otras sustituciones:

a) $t = \cos x$, si $R\,(-\text{sen}\,x,\ \cos x) = -R\,(\text{sen}\,x,\ \cos x)$;

b) $t = \text{sen}\,x$, si $R\,(\text{sen}\,x,\ -\cos x) = -R\,(\text{sen}\,x,\ \cos x)$;

c) $t = \text{tg}\,x$, si $R\,(-\text{sen}\,x,\ -\cos x) = R\,(\text{sen}\,x,\ \cos x)$.

II. Ejemplos de resolución de problemas

1. $I = \int \cos^5 x\,dx$. La función integrando se refiere al caso b). Por eso hagamos $t = \text{sen}\,x$. Obtendremos $dt = \cos x\,dx$, $\cos^4 x = (1-\text{sen}^2 x)^2 = (1-t^2)^2$ e

$$I = \int (1-t^2)^2\,dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C,$$

donde $t = \text{sen}\,x$.

2. $I = \int \text{sen}\,5x \cos x\,dx$. En el caso dado resulta más simple calcular la integral sin recurrir a las sustituciones y representando la función integrando en la forma $\frac{1}{2}(\text{sen}\,4x + \text{sen}\,6x)$. Entonces

$$I = \frac{1}{2}\int (\text{sen}\,4x + \text{sen}\,6x)\,dx = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{12}\cos 6x + C.$$

3. $I = \int \frac{dx}{a\cos x + b\,\text{sen}\,x}$. Aquí se puede hacer la sustitución universal $t = \text{tg}\,\frac{x}{2}$. Entonces $x = 2\,\text{arctg}\,t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\text{sen}\,x = \frac{2t}{1+t^2}$,

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ y la integral I se reduce a la integral de una función racional. Sin embargo, será más simple transformar al principio la función integrando:

$$\frac{1}{a\cos x+b\,\mathrm{sen}\,x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{sen}\,(x+\varphi)},$$

donde $\mathrm{sen}\,\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, y hacer luego $t=\mathrm{tg}\,\frac{x+\varphi}{2}$. Entonces $\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\mathrm{sen}\,(x+\varphi)=\frac{2t}{1+t^2}$ y, por consiguiente,

$$I=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}\bigg|_{t=\mathrm{tg}\,\frac{x+\varphi}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x+\varphi}{2}\right|+C.$$

III. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

Hállense las integrales:

93. $\int \mathrm{sen}^6 x\,\mathrm{d}x$. **94.** $\int \mathrm{sen}^2 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x$.

95. $\int \frac{\mathrm{sen}^3 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$. **96.** $\int \mathrm{tg}^5 x\,\mathrm{d}x$.

97. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{sen}^3 x\cos^5 x}}$. **98.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{tg}\,x}}$.

99. $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x$.

100. $\int \mathrm{sen}^3 2x\cos^2 3x\,\mathrm{d}x$.

101. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\,\mathrm{sen}\,x-\cos x+5}$.

102. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}$ para a) $0<\varepsilon<1$; b) $\varepsilon>1$.

103. $\int \frac{\mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{sen}^2 x}$. **104.** $\int \frac{\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{sen}^3 x+\cos^3 x}$.

105. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^6 x+\mathrm{sen}^6 x}$.

Capítulo VI
Teoremas fundamentales de las funciones continuas y derivables

§ 1. Teoremas de acotamiento de las funciones continuas

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Definición de una función acotada. Sea la función $y = f(x)$ definida en el conjunto X.

DEFINICIÓN. *Una función $y = f(x)$ se llama **acotada superiormente** (**inferiormente**) en el cunjunto X, si $\exists$ un número M (m) tal que $\forall x \in X$ se cumple la desigualdad $f(x) \leqslant M$ $(f(x) \geqslant m)$.*

El número M (m) se llama *cota superior* (*inferior*) de la función en el conjunto X. La función $y = f(x)$ se llama *acotada en el conjunto X* (o acotada por ambos lados), si está acotada superior e inferiormente en este conjunto.

2. Teoremas de acotamiento de las funciones continuas.

Teorema 1 (DE ACOTAMIENTO LOCAL DE UNA FUNCIÓN QUE ES CONTINUA EN UN PUNTO). *Si la función $y = f(x)$ es continua en el punto x_0, existirá un entorno del punto x_0, en el cual esta función está acotada.*

Teorema 2 (SOBRE LA ESTABILIDAD DEL SIGNO DE LA FUNCIÓN CONTINUA). *Si la función $y = f(x)$ es continua en el punto x_0 y $f(x_0) \neq 0$, existirá un entorno del punto x_0, en la cual $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(x_0)$.*

Teorema 3 (PRIMER TEOREMA DE WEIERSTRASS). *Una función continua en un segmento está acotada en este segmento.*

3. Cotas exactas de la función.

DEFINICIÓN. *El número M se llama **cota exacta superior** de una función $y = f(x)$ en el conjunto X, si:*

1°) $\forall x \in X$ se cumple la desigualdad $f(x) \leqslant M$;

2°) $\forall M' < M$ $\exists x' \in X$ tal que $f(x') > M'$.

OBSERVACIÓN. La 1ª condición significa que el número M es una de las cotas superiores de la función $y = f(x)$ en el conjunto X. La 2ª condición significa que M es la mínima de las cotas superiores de la función $y = f(x)$ en el conjunto X, es decir, ningún número M', menor que M, es la cota superior.

La cota superior exacta de la función $y = f(x)$ en el conjunto X se designa así: $\sup\limits_X f(x)$. Si la función $y = f(x)$ no está acotada superiormente en el conjunto X, entonces se escribe $\sup\limits_X f(x) = +\infty$.

De manera análoga se determina la cota inferior exacta de la función: $\inf_X f(x)$. La diferencia $\sup_X f(x) - \inf_X f(x)$ se llama *oscilación* de la función $y = f(x)$ en el conjunto X.

Teorema 4 (SEGUNDO TEOREMA DE WEIERSTRASS). *Una función $f(x)$ continua en un segmento $[a, b]$ alcanza en este segmento sus cotas exactas, es decir, $\exists x'$ y $x'' \in [a, b]$ tales que $f(x') = \inf_{[a, b]} f(x)$, $f(x'') = \sup_{[a, b]} f(x)$.*

Si la función $y = f(x)$ alcanza en el conjunto X su cota superior (inferior) exacta, entonces aquélla tiene en X *el valor máximo (mínimo)*, además $\max_X f(x) = \sup_X f(x)$ [respectivamente $\min_X f(x) = \inf_X f(x)$]. En caso contrario la función no tiene en el conjunto X el valor máximo (mínimo).

II. Preguntas y tareas de control

1. Dése la definición de una función acotada superiormente (inferiormente) en el conjunto X.
2. Utilizando la regla de construcción de negaciones para las expresiones con cuantificadores, enúnciese la definición de una función no acotada superiormente (inferiormente) en el conjunto X.
3. Demuéstrese que la definición de una función acotada equivale a la siguiente: una función $y = f(x)$ se llama acotada en el conjunto X, si $\exists$ un número $A > 0$ tal que $\forall x \in X$ se cumple la desigualdad $|f(x)| \leqslant A$.
4. Enúnciese la definición de una función no acotada en el conjunto X recurriendo a la negación de la definición aducida en la tarea 3.
5. Enúnciese el teorema de acotamiento local de una función continua.
6. Demuéstrese que el teorema de acotamiento local de una función sigue siendo válido, si la condición de continuidad de la función en el punto x_0 se sustituye por la condición de existencia de $\lim_{x \to x_0} f(x)$.
7. Enúnciese el teorema de estabilidad del signo de la función continua.
8. Se conoce que $f(x)$ es continua en el punto x_0 y $f(x_0) = 0$. ¿Se podrá afirmar que $f(x)$: a) tiene un signo determinado en cierto entorno del punto x_0 (a excepción del propio punto x_0); b) no tiene signo definido en ningún entorno del punto x_0?
9. Enúnciese el primer teorema de Weierstrass.
10. ¿Será cierta la siguiente afirmación: «Una función continua en un intervalo está acotada en este intervalo»?
11. ¿Puede una función no acotada en un conjunto X ser continua en este conjunto, si: a) X es un segmento; b) X es un intervalo?

12. Dése la definición de las cotas exacta superior y exacta inferior de una función. ¿En qué caso se supone que $\inf\limits_{X} f(x) = -\infty$?
13. ¿Será cierta la afirmación: «Una función acotada superiormente (inferiormente) en un conjunto X tiene en este conjunto la cota exacta superior (inferior)».
14. Enúnciese el segundo teorema de Weierstrass.
15. ¿Será cierta la afirmación: «Una función continua y acotada en un intervalo alcanza en este intervalo sus cotas exactas»?
16. ¿Será cierta la afirmación: «Si una función no alcanza en el segmento $[a, b]$ su cota exacta superior (o inferior), entonces aquélla es discontinua en este segmento»?
17. ¿Será cierta la afirmación: «Una función discontinua en el segmento $[a, b]$ no alcanza en este segmento sus cotas exactas»?
18. ¿Serán ciertas las afirmaciones:

a) «Una función $y = f(x)$ acotada en el segmento $[a, b]$ tiene $\max\limits_{[a, b]} f(x)$ y $\min\limits_{[a, b]} f(x)$»?

b) «Una función continua en el segmento $[a, b]$ tiene $\max\limits_{[a, b]} f(x)$ y $\min\limits_{[a, b]} f(x)$»?

19. ¿Serán ciertas las afirmaciones de la tarea 18, si el segmento $[a, b]$ se sustituye por el intervalo (a, b)?

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Demostrar que la función $y = \frac{1}{1+x^2}$ está acotada en la recta numérica $(-\infty, +\infty)$.

△ Puesto que $x^2 \geqslant 0$, entonces $1 + x^2 \geqslant 1$, y, por consiguiente, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ se cumplen las desigualdades

$$0 \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1. \qquad (1)$$

De aquí se deduce que la función $y = \frac{1}{1+x^2}$ está acotada en $(-\infty, +\infty)$. ▲

2. Hallar las cotas exactas de la función que figura en el ejemplo 1 y determinar, si ésta tiene los valores máximo y mínimo.

△ Está claro que $\frac{1}{1+x^2} \to 0$ cuando $x \to \infty$, por eso esta función puede tomar valores, tanto como se quiera, próximos de cero. Es natural suponer que $\inf\limits_{(-\infty, +\infty)} \frac{1}{1+x^2} = 0$. Demostremos esto, valiéndonos de la definición de la cota inferior exacta. Hay que mostrar que están cumplidas dos condiciones:

1ª) $\forall x \in (-\infty, +\infty)$: $\frac{1}{1+x^2} \geqslant 0$;

2ª) $\forall m > 0 \; \exists x'$ tal que $\frac{1}{1+x'^2} < m$.

La 1ª condición se cumple en vigor de la desigualdad izquierda (1). Demostremos que está cumplida la 2ª condición. Prefijemos un $m > 0$ arbitrario. Si $m \geqslant 1$, la desigualdad $\frac{1}{1+x'^2} < m$ se cumple en virtud de (1) para todos x'. Sea $m < 1$. Entonces $\frac{1}{m} - 1 > 0$. Tomemos en calidad de x' cualquier número tal que $x' > \sqrt{\frac{1}{m} - 1}$. Entonces $x'^2 > \frac{1}{m} - 1$, de donde $1 + x'^2 > \frac{1}{m}$ y, por consiguiente, $\frac{1}{1+x'^2} < m$, lo que se trataba de demostrar. Así, pues, $\inf\limits_{(-\infty, +\infty)} \frac{1}{1+x^2} = 0$.

De manera análoga se puede demostrar que $\sup\limits_{(-\infty, +\infty)} \frac{1}{1+x^2} = 1$.

Advirtamos ahora que la función $y = \frac{1}{1+x^2}$ toma el valor igual a 1 (cuando $x = 0$), pero no toma el valor igual a 0 para ningún x $\left(\frac{1}{1+x^2} > 0 \ \forall x\right)$. Por esto la función dada tiene en $(-\infty, +\infty)$ el valor máximo $\left(\max\limits_{(-\infty, +\infty)} \frac{1}{1+x^2} = 1\right)$, pero no tiene el valor mínimo. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

1. Demuéstrese el acotamiento de la función:

a) $y = \frac{1+x}{1+x^2}$ en la semirrecta $[0, +\infty)$;

b) $y = \frac{2x}{1+x^2}$ en la recta numérica $(-\infty, +\infty)$;

c) $y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ en $(-\infty, +\infty)$;

d) $y = \operatorname{arctg} 2^x$ en $(-\infty, +\infty)$;

e) $y = xe^{-x}$ en $(0, +\infty)$.

2. ¿Estarán acotadas las siguientes funciones:

a) $y = x^2$ en $[-5, 10]$; b) $y = x^2$ en $[-5, +\infty)$;

c) $y = x \cos (1/x)$ en $(-\infty, +\infty)$;

d) $y = \begin{cases} 2^{1/(x-1)} & \text{cuando } x \neq 1, \\ 0 \text{ cuando} & x = 1, \end{cases}$ en $(0, 2)$;

e) $y = 2^{1/(x-1)}$ en $(0, 1)$?

3. Adúzcase un ejemplo de una función que en cierto conjunto X: a) está acotada superiormente, pero no lo está inferiormente, b) está acotada inferiormente, pero no lo está superiormente; c) no está acotada ni inferior ni superiormente.

4. Supongamos que una función $f(x)$ está definida en un conjunto X y que $\forall x \in X$ existe un entorno en el que $f(x)$ está acotada.

¿Se podrá deducir de aquí el acotamiento de $f(x)$ en X, si: a) X es un intervalo; b) X es un segmento?

5. Adúzcase un ejemplo de una función $f(x)$ que es continua e igual a cero en cierto punto x_0 y: a) tiene un signo determinado en cierto entorno del punto x_0 (a excepción del propio punto x_0); b) no conserva el signo en ningún entorno del punto x_0.

8. Adúzcase un ejemplo de una función continua en el intervalo, pero no acotada en éste: a) superiormente; b) inferiormente; c) por ambos lados.

9. Cítese un ejemplo de una función definida en $[a, b]$, pero no acotada en $[a, b]$: a) superiormente; b) inferiormente; c) por ambos lados. ¿Puede semejante función ser continua en $[a, b]$?

8. Hállense las cotas exactas de la función:

a) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ en $(0, +\infty)$;

b) $f(x)=x^2$ en $[-5, 10]$;

c) $f(x)=\operatorname{arctg} 2^x$ en $(-\infty, +\infty)$;

d) $f(x)=\operatorname{sen} x+\cos x$ en $[0, \pi]$;

e) $f(x)=2^{1/(x-1)}$ en $(0, 1)$.

¿Alcanzará $f(x)$ sus cotas exactas en el conjunto indicado?

9. Adúzcase un ejemplo de una función $f(x)$ en la cual: a) $\sup\limits_X f(x) = +\infty$; b) $\inf\limits_X f(x) = -\infty$.

10. Cítese un ejemplo de una función continua y acotada en un intervalo, la cual en este intervalo: a) alcanza sup, pero no alcanza inf; b) alcanza inf, pero no alcanza sup; c) no alcanza ni sup, ni inf.

11. Dése un ejemplo de una función acotada en un segmento, la cual en este segmento: a) alcanza sup, pero no alcanza inf; b) alcanza inf, pero no alcanza sup; c) no alcanza ni sup, ni inf. ¿Puede semejante función ser continua en el segmento?

12. Cítese un ejemplo de una función que en cierto conjunto X tiene sup e inf, pero no tiene máx y mín.

13. Encuéntrese la oscilación de la función:

a) $f(x) = x^2$ en $(-1, 2)$;

b) $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ en $(0, \varepsilon)$, donde ε es un número arbitrario;

c) $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ en $(0, 1)$;

d) $f(x) = x\,|\operatorname{sen}(1/x)|$ en $(0, 1)$.

14. Designemos con $m[f]$ y $M[f]$ las cotas exactas inferior y superior, respectivamente, de una función $f(x)$ en el conjunto X. Supongamos que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ están definidas en X. Demuéstrese que

$$m[f_1 + f_2] \geqslant m[f_1] + m[f_2],$$
$$M[f_1 + f_2] \leqslant M[f_1] + M[f_2].$$

Dense ejemplos de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$, para las cuales en las expresiones aducidas tiene lugar: a) el signo de igualdad; b) el signo de desigualdad.

§ 2. Continuidad uniforme de una función

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Definición de la continuidad uniforme de una función. Supongamos que el conjunto X es un intervalo o consta de varios intervalos.

DEFINICIÓN. *Una función $f(x)$ se llama **uniformemente continua** en el conjunto X, si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall x, x' \in X$, que satisfagan la desigualdad $|x - x'| < \delta$, se cumple la desigualdad $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.*

OBSERVACIÓN. De la definición se deduce que si una función es uniformemente continua en el conjunto X, entonces es continua en este conjunto, es decir, es continua en cada uno de sus puntos. La diferencia entre continuidad uniforme de una función en el conjunto X y la continuidad «corriente» en este conjunto (es decir, la continuidad en cada uno de sus puntos) consiste en que en caso de continuidad uniforme $\forall \varepsilon > 0$ se encontrará un $\delta(\varepsilon) > 0$ «necesario» (tal como el que se requiere según la definición), común para todos $x \in X$ (δ depende sólo de ε y no depende de x), mientras que en caso de la continuidad «corriente» $\forall \varepsilon > 0$ y $\forall x \in X$ se encontrará un δ «necesario» (es decir, δ depende tanto de ε, como de x), pero para ciertos ε puede no existir el $\delta(\varepsilon) > 0$ «necesario», que sea común para todos los $x \in X$. En este caso δ varía en función de x, tomando valores tan pequeños como se quiera (para ε fijados).

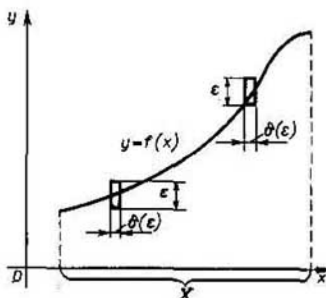


Fig. 5.

2. Ilustración geométrica de la continuidad uniforme de una función. Si $f(x)$ es uniformemente continua en X, entonces $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que el rectángulo con lados $\delta(\varepsilon)$ y (ε) paralelos a los ejes Ox y Oy puede desplazarse a lo largo de la gráfica (conservando el paralelismo de sus lados a los ejes de coordenadas) de tal manera que la gráfica no cortará los lados horizontales del rectángulo, sino que cortará sólo sus lados verticales (fig. 5).

3. Teoremas de la continuidad uniforme de una función.

Teorema 5 (TEOREMA DE CANTOR). *Una función continua en un segmento es uniformemente continua en el mismo.*

Teorema 6 (CONDICIÓN SUFICIENTE PARA LA CONTINUIDAD UNIFORME DE UNA FUNCIÓN). *Si una función $f(x)$ tiene en un intervalo X una derivada acotada, entonces $f(x)$ es uniformemente continua en este intervalo* *.

---

* Recordemos que llamamos intervalo a cualquiera de los conjuntos siguientes: segmento, el propio intervalo, semiintervalo, semirrecta y la recta numérica.

II. Preguntas y tareas de control

1. Dése la definición de la continuidad uniforme de una función.
2. Valiéndose de los cuantificadores, enúnciese la negación de la continuidad uniforme de una función.
3. ¿Serán válidas las afirmaciones:
   a) «Si $f(x)$ es continua en el conjunto X, será uniformemente continua en el mismo»?
   b) «Si $f(x)$ es uniformemente continua en X, será continua en X»?
4. ¿Qué ilustración geométrica tiene la continuidad uniforme de una función?
5. Enúnciese el teorema de Cantor.
6. ¿Será cierta la afirmación: «Una función continua en un intervalo es uniformemente continua en el mismo»?
7. Enúnciese el teorema que expresa la condición suficiente de la continuidad uniforme de una función.
8. ¿Será el acotamiento de una derivada la condición necesaria de la continuidad uniforme de una función?

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Investigar la continuidad uniforme de la función $y = x^2$ en el intervalo $(-l, l)$, donde $l > 0$ es cualquier número fijo.

△ Demostremos que la función $y = x^2$ es uniformemente continua en el intervalo $(-l, l)$, además lo haremos aplicando tres procedimientos: 1) utilizando la definición de la continuidad uniforme; 2) empleando el teorema de Cantor; 3) haciendo uso de la condición suficiente de la continuidad uniforme.

I PROCEDIMIENTO. Anotemos la diferencia $y(x_1) - y(x_2)$:

$$y(x_1) - y(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2). \qquad (1)$$

Si $x_1, x_2 \in (-l, l)$, resulta que el módulo de la suma $|x_1 + x_2|$ está acotado por el número $2l$. Por eso el módulo de la diferencia $|y(x_1) - y(x_2)|$ será tan pequeño como se quiera para todos $x_1, x_2 \in (-l, l)$, si es que el módulo de la diferencia $|x_1 - x_2|$ es lo suficiente pequeño. Estos razonamientos cualitativos ya muestran que la función $y = x^2$ es uniformemente continua en el intervalo $(-l, l)$.

Aduzcamos ahora unos razonamientos más estrictos, recurriendo a la definición de la continuidad uniforme. Prefijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario y hagamos $\delta = \varepsilon/(2l)$. Entonces $\forall x_1, x_2 \in (-l, l)$, que satisfagan la desigualdad $|x_1 - x_2| < \delta$, se cumple la desigualdad

$$|y(x_1) - y(x_2)| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| < \delta \cdot 2l = \varepsilon.$$

Precisamente esto significa, según la definición, que la función $y = x^2$ es uniformemente continua en el intervalo $(-l, l)$.

II PROCEDIMIENTO. Examinemos la función $y = x^2$ en el segmento $[-l, l]$. Ésta es continua en este segmento y, por consiguiente, según

el teorema de Cantor, es uniformemente continua en él. De aquí se deduce que la función $y = x^2$ es uniformemente continua en el intervalo $(-l, l)$. En efecto, $(-l, l) \subset [-l, l]$ y, puesto que la desigualdad $|y(x_1) - y(x_2)| < \varepsilon$ se cumple $\forall x_1, x_2 \in [-l, l]$, que satisfacen la desigualdad $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$, también se cumplirá para todos $x_1, x_2 \in (-l, l)$, que satisfacen esta misma desigualdad.

III PROCEDIMIENTO. La derivada $y'(x) = 2x$ está acotada en el intervalo $(-l, l)$: $|y'(x)| = 2|x| \leqslant 2l$. De aquí según el teorema 6 se deduce que la función $y = x^2$ es uniformemente continua en $(-l, l)$. ▲

2. Investigar la función $y = x^2$ en sentido si es uniformemente continua en toda la recta numérica.

△ En la expresión (1) se ve que si $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, entonces, por muy pequeño que sea el módulo de la diferencia $|x_1 - x_2|$, el módulo de la diferencia $|y(x_1) - y(x_2)|$ no lo será para x_1 y x_2 suficientemente grandes, debido al factor $(x_1 + x_2)$. Este razonamiento cualitativo sugiere que la función $y = x^2$ no es uniformemente continua en toda la recta $(-\infty, \infty)$. Demostremos esto, utilizando la negación de la definición dada para la continuidad uniforme. Es necesario demostrar que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ $\exists x_1, x_2$ que satisfacen la desigualdad $|x_1 - x_2| < \delta$, para los cuales $|y(x_1) - y(x_2)| \geqslant \varepsilon$.

Tomemos $\varepsilon = 1$ y $\forall \delta > 0$, hagamos $x_1 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$, $x_2 = \frac{1}{\delta}$. Entonces $|x_1 - x_2| = \delta/2 < \delta$, pero además

$$|y(x_1) - y(x_2)| = |x_1 - x_2|\,|x_1 + x_2| = \frac{\delta}{2}\left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) = 1 + \frac{\delta^2}{4} \geqslant 1 = \varepsilon.$$

Esto demuestra que la función $y = x^2$ no es uniformemente continua en $(-\infty, +\infty)$. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

15. Valiéndose de la definición dada para la continuidad uniforme y de su negación, demuéstrese que la función $y = 1/x$: a) es uniformemente continua en la semirrecta $[1, +\infty)$; b) no es uniformemente continua en la semirrecta $(0, +\infty)$.

16. Adúzcase un ejemplo de una función que sea continua en cierto intervalo, pero no uniformemente continua en el mismo.

17. Demuéstrese la continuidad uniforme de las funciones siguientes, haciendo uso sólo de la definición de la continuidad uniforme [es decir, eligiendo a partir del ε arbitrario prefijado el $\delta = \delta(\varepsilon)$ necesario]: a) $f(x) = kx + b$ en $(-\infty, +\infty)$, $k \neq 0$; b) $f(x) = x^3$ en $(-3, 5)$; c) $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $(-\infty, +\infty)$; d) $f(x) = e^x$ en $[0, 10]$.

18. Investíguese la continuidad uniforme de las funciones siguientes (aplicando cualquier procedimiento): a) $f(x) = \ln x$

en (0, 1) y en (1, 2); b) $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ en (0, 1) y en (0,01, 1); c) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ en $(-\infty, +\infty)$; d) $f(x) = \arcsen x$ en $(-1, 1)$; e) $f(x) = \sqrt{x}$ en $[0, +\infty)$.

19. Demuéstrese que la función $f(x) = \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}$ es uniformemente continua en los intervalos $I_1 = (-1 < x < 0)$ e $I_2 = (0 < x < 1)$, pero no es uniformemente continua en su suma $I_1 + I_2 = \{0 < |x| < 1\}$.

20. Demuéstrese que si la función $f(x)$ es uniformemente continua en cada uno de los segmentos $[a, c]$ y $[c, b]$, será también uniformemente continua en el segmento $[a, b]$.

21. a) Demuéstrese que si la función $f(x)$ está definida y es continua en la semirrecta $[a, +\infty)$ y existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, entonces $f(x)$ es uniformemente continua en $[a, +\infty)$.

b) Adúzcase un ejemplo de una función uniformemente continua en la semirrecta $[a, +\infty)$, en la cual no existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

22. Adúzcase un ejemplo de una función que tiene la derivada no acotada en un conjunto X, pero es uniformemente continua en este conjunto.

23. Demuéstrese que una función uniformemente continua en un intervalo, está acotada en éste. ¿Será cierta la afirmación inversa?

24. Demuéstrese que la suma y el producto de dos funciones uniformemente continuos en un intervalo, son uniformemente continuos en el mismo.

25. Se llama módulo de continuidad de una función $f(x)$ en el intervalo (a, b) (a y b pueden ser iguales, respectivamente, a $-\infty$ y $+\infty$) la siguiente función del argumento δ $(\delta > 0)$:

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\substack{x_1,\, x_2 \in (a,\, b),\\ |x_1 - x_2| \leqslant \delta}} |f(x_1) - f(x_2)|$$

(si $|f(x_1) - f(x_2)|$ es una función no acotada, cuando $\{|x_1 - x_2| \leqslant \delta;\ x_1, x_2 \in (a, b)\}$, entonces se escribe $\omega_f(\delta) = +\infty$).

a) Demuéstrese que para la continuidad uniforme de la función $f(x)$ en el intervalo (a, b) es necesario y suficiente que $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega_f(\delta) = 0$.

b) Adúzcase un ejemplo de una función $f(x)$, $x \in (a, b)$, para la cual $\omega_f(\delta) = +\infty$.

26. Supongamos que la función $f(x)$ es continua en un conjunto X, es decir, es continua en cada punto $x \in X$. Entonces $\forall \varepsilon > 0$ y $\forall x \in X\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ tal que de la desigualdad $|x' - x| < \delta(\varepsilon, x)$ $(x' \in X)$ se deduce la desigualdad $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Demuéstrese que para la continuidad uniforme de la función $f(x)$ en el conjunto X es necesario y suficiente que $\inf\limits_{X} \delta(\varepsilon, x) > 0$ $(\forall \varepsilon > 0)$.

§ 3. Algunos teoremas de las funciones derivables

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Crecimiento de una función en un punto.

DEFINICIÓN. *Se dice que la función* $f(x)$ ***crece en el punto*** x_0, *si existe tal entorno del punto* x_0, *en el que* $f(x) > f(x_0)$ *para* $x > x_0$ $f(x) < f(x_0)$ *para* $x < x_0$.

En forma análoga se define el decrecimiento de una función en un punto.

Teorema 7 (CONDICIÓN SUFICIENTE DE CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO). *Si la función* $f(x)$ *es derivable en el punto* x_0 y $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), *entonces* $f(x)$ ***crece (no decrece)*** *en el punto* x_0.

2. Teoremas de crecimiento y de decrecimiento de una función sobre un intervalo.

DEFINICIÓN. *Se dice que la función* $f(x)$ *crece (no decrece) en el intervalo* X, *si* $\forall x_1, x_2 \in X$ *de la condición* $x_1 < x_2$ *se deduce la desigualdad* $f(x_1) < f(x_2)$ [*respectivamente* $f(x_1) \leqslant f(x_2)$].

De manera análoga se determina el decrecimiento (no crecimiento) de una función en un intervalo.

Teorema 8. *Para que la función* $f(x)$ *derivable en el intervalo* X *no decrezca (no crezca) en éste, es necesario y suficiente que* $\forall x \in X$ *se cumpla la desigualdad* $f'(x) \geqslant 0$ [$f'(x) \leqslant 0$].

Teorema 9 (CONDICIÓN SUFICIENTE DE LA MONOTONÍA ESTRICTA DE UNA FUNCIÓN). *Si* $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in X$, *entonces* $f(x)$ *crece (decrece) sobre el intervalo* X.

3. Teoremas de Rolle, de Lagrange y de Cauchy.

Teorema 10 (TEOREMA DE ROLLE). *Supongamos que la función* $f(x)$ *satisface las condiciones:*

1ª) $f(x)$ *es continua sobre* $[a, b]$;

2ª) $f(x)$ *es derivable en* (a, b);

3ª) $f(a) = f(b)$.

Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL TEOREMA DE ROLLE. Supongamos que x es el tiempo y $f(x)$, la coordenada de un punto que se mueve por una recta en el instante x. En el instante inicial $x = a$ el punto tiene la coordenada $f(a)$, luego se mueve de manera determinada con la velocidad $f'(x)$ y en el instante $x = b$ regresa al punto con coordenada $f(a)$ [$f(b) = f(a)$]. Está claro que para regresar al punto $f(a)$ aquél debe pararse en cierto momento de tiempo (antes de «volverse atrás»), es decir, en cierto momento $x = c$ la velocidad $f'(c) = 0$.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL TEOREMA DE ROLLE. Existe un punto $c \in (a, b)$ tal que la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es paralela al eje Ox.

Teorema 11 (TEOREMA DE LAGRANGE). *Supongamos que una función* $f(x)$ *satisface las condiciones:*

1ª) $f(x)$ *es continua sobre* $[a, b]$;

2ª) $f(x)$ *es derivable en* (a, b).

Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \qquad (1)$$

La fórmula (1) se llama FÓRMULA DE LAGRANGE (*o fórmula de los incrementos finitos*).

INTERPRETACIÓN FISICA DEL TEOREMA DE LAGRANGE. Supongamos que x es el tiempo; $f(x)$, la coordenada de un punto que se mueve por una recta en el instante x. Escribamos la fórmula de Lagrange en la forma de

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

La magnitud en el primer miembro de la igualdad es, evidentemente, la velocidad media de movimiento del punto por la recta durante el intervalo de tiempo desde a hasta b. La fórmula de Lagrange muestra que existe un momento tal de tiempo $x = c$, en el cual la velocidad instantánea es igual a la velocidad media en el intervalo de tiempo $[a, b]$.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL TEOREMA DE LAGRANGE. El número $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es el coeficiente angular (pendiente) de la recta que pasa a través de los extremos de la gráfica de la función $y = f(x)$: los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, mientras que $f'(c)$ es el coeficiente angular de la tangente a la gráfica en el punto $(c, f(c))$. La fórmula de Lagrange muestra que la tangente a la gráfica en cierto punto $(c, f(c))$ es paralela a la recta que pasa a través de los extremos de la gráfica (o coincide con dicha recta).

Teorema 12 (TEOREMA DE CAUCHY). *Supongamos que las funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$ *satisfacen las condiciones*:

1ª) $f(x)$ *y* $g(x)$ *son continuas sobre* $[a, b]$;

2ª) $f(x)$ *y* $g(x)$ *son derivables en* (a, b);

3ª) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$.

Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ *tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (2)$$

La fórmula (2) se llama FÓRMULA DE CAUCHY.

II. Preguntas y tareas de control

1. Dése la definición de crecimiento (decrecimiento) de una función en un punto.
2. Enúnciese el teorema que expresa la condición suficiente de crecimiento de una función en un punto.
3. ¿Serán válidas las afirmaciones?

   a) «Si una función crece en el punto x_0, resulta que ella tiene en este punto una derivada positiva».

b) «Si una función $f(x)$, derivable en un punto x_0, crece en este punto, entonces $f'(x_0) > 0$».

4. Enúnciese el teorema que expresa la condición necesaria y suficiente de la monotonía de una función derivable en un intervalo.
5. Enúnciese el teorema que expresa la condición suficiente de la monotonía estricta de una función derivable en un intervalo.
6. ¿Será cierta la afirmación: «Si una función $f(x)$, derivable en un intervalo X, crece en éste, tendremos que $f'(x) > 0 \ \forall x \in X$»?
7. Sea una función $f(x)$ definida en cierto entorno de cada punto del conjunto X. ¿Serán válidas las afirmaciones?

   a) «Si $f(x)$ crece en el conjunto X, crecerá en cada punto $x_0 \in X$».

   b) «Si $f(x)$ crece en cada punto $x_0 \in X$, crecerá en el conjunto X». (Examínese la función $f(x) = -1/x$).
8. Enúnciese el teorema de Rolle.
9. ¿Permanecerá válido el teorema de Rolle, si se omite la condición: a) $f(a) = f(b)$; b) $f(x)$ es continua en $[a, b]$? Adúzcanse los correspondientes ejemplos.
10. Enúnciese el teorema de Lagrange.
11. Enúnciese el teorema de Cauchy.

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Hallar los intervalos de monotonía de la función $f(x) = 3x - x^3$.

△ Tenemos $f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$. Puesto que $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, 1)$, $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -1)$ y $x \in (1, \infty)$, entonces la función $f(x) = 3x - x^3$ crece en el intervalo $(-1, 1)$ y decrece en las semirrectas $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$; se puede también decir que $f(x)$ crece en el segmento $[-1, 1]$ y decrece en las semirrectas $(-\infty, -1]$ y $[1, +\infty)$. ▲

2. Demostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \operatorname{sen}(2/x) & \text{cuando } x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando } x = 0 \end{cases}$$

crece en el punto $x = 0$, pero no es creciente en ninguno de los intervalos $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$ es un número arbitrario).

△ Tenemos

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x \operatorname{sen}(2/x) - 2\cos(2/x) & \text{cuando } x \neq 0, \\ 1 & \text{cuando } x = 0 \end{cases}$$

(en lo referente al cálculo de $f'(0)$ véase el ejemplo 6, § 1 del cap. IV).

Puesto que $f'(0) = 1 > 0$, tendremos que según el teorema 7 la función $f(x)$ crece en el punto $x = 0$.

Si $f(x)$ creciera en cierto intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, resultaría que según el teorema 8 se cumpliría la condición $f'(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Mostremos que esto no es así. Hagamos $x_n = 1/(\pi n)$ (n es un nú-

mero natural). Es evidente que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n$ tal que $1/(\pi n) < \varepsilon$, es decir, $x_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Sustituyendo $x = x_n = 1/(\pi n)$ en la expresión para $f'(x)$, cuando $x \neq 0$, obtenemos $f'(x_n) = -1 < 0$. Esto demuestra que la función $f(x)$ no es creciente en ninguno de los intervalos $(-\varepsilon, \varepsilon)$. ▲

3. Supongamos que la función $f(x)$ satisface las siguientes condiciones: 1) $f(x)$ tiene una derivada continua en $[a, b]$; 2) $f(x)$ tiene la derivada segunda en (a, b); 3) $f(a) = f'(a) = 0$, $f(b) = 0$. Demostrar que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f''(c) = 0$.

△ Es evidente que para la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ están cumplidas todas las condiciones del teorema de Rolle. Por eso existe un punto $d \in (a, b)$ tal que $f'(d) = 0$.

Examinemos la función $f'(x)$ en el segmento $[a, d]$. Tenemos: 1) $f'(x)$ es continua en $[a, d]$; 2) $f'(x)$ tiene la derivada $(f'(x))' = f''(x)$ en (a, d); 3) $f'(a) = f'(d) = 0$. En virtud del teorema de Rolle existe un punto $c \in (a, d)$ [y, por consiguiente, $c \in (a, b)$] tal que $(f'(x))'|_{x=c} = f''(c) = 0$. ▲

4. Demostrar que $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|\ \forall x, y$.

△ Según la fórmula de Lagrange,

$$\cos x - \cos y = \operatorname{sen} \xi \cdot (x - y),$$

donde ξ es cierto punto del intervalo (x, y). Puesto que $|\operatorname{sen} \xi| \leqslant 1$, entonces $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$. ▲

5. Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ están definidas y son derivables para $x \geqslant x_0$, además $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x) > g'(x)$, cuando $x > x_0$. Demostrar que $f(x) > g(x)$, siendo $x > x_0$.

△ Examinemos una función $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ en un segmento arbitrario $[x_0, x]$ $(x > x_0)$. Según la fórmula de Lagrange,

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x - x_0), \tag{3}$$

donde ξ es cierto punto del intervalo (x_0, x). Puesto que

$$\varphi(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0, \quad \varphi'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi) > 0,$$
$$x - x_0 > 0,$$

de la igualdad (3) obtenemos $\varphi(x) > 0$, es decir, $f(x) - g(x) > 0$, cuando $x > x_0$. De esta manera, $f(x) > g(x)$, cuando $x > x_0$. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

27. Hállense los intervalos de monotonía de las funciones:
a) $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$;
b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$;
c) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$; d) $f(x) = x + \operatorname{sen} x$;
e) $f(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$; f) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$;
g) $f(x) = x^2 2^{-x}$; h) $f(x) = x^n e^{-x}$ $(n > 0,\ x \geqslant 0)$.

28. Demuéstrese que si una función crece en cada punto de un intervalo, quiere decir que crece en este intervalo. ¿Quedará válida esta afirmación, si el intervalo se sustituye por un conjunto arbitrario?

29. Supongamos que una función $f(x)$ satisface las condiciones: 1) $f(x)$ tiene una derivada continua de $(n-1)$-ésimo orden en $[x_0, x_n]$; 2) $f(x)$ tiene una derivada de n-ésimo orden en (x_0, x_n), 3) $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n)$, donde $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Demuéstrese que existe un punto $\xi \in (x_0, x_n)$ tal que $f^{(n)}(\xi) = 0$.

30. Recurriendo al teorema de Rolle, demuéstrese que si todas las raíces del polinomio

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \ (a_0 \neq 0)$$

con coeficientes reales a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ son reales, sus derivadas $P'_n(x)$, $P''_n(x)$, $\ldots$, $P_n^{n-1}(x)$ también tienen sólo raíces reales.

31. Demuéstrese que todas las raíces del polinomio de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2-1)^n\}$$

son reales y se encuentran en el intervalo $(-1, 1)$.

32. Hállese el punto c en la fórmula de los incrementos finitos (1) para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5\,(3-x^2) & \text{cuando } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1/x & \text{cuando } 1 < x < +\infty \end{cases}$$

en el segmento $[0, 2]$.

33. Utilizando la fórmula de Lagrange, demuéstrese la validez de las desigualdades:

a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leqslant |x - y| \ \forall x, y$;

b) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqslant |x - y| \ \forall x, y$;

c) $\frac{x-y}{x} < \ln\frac{x}{y} \frac{x-y}{y}$ cuando $0 < y < x$.

34. Demuéstrese la validez de las desigualdades:

a) $e^x > 1 + x$ cuando $x \neq 0$;

b) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ cuando $x > 0$;

c) $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$ cuando $x > 0$;

d) $x - \frac{x^3}{3!} < \operatorname{sen} x < x$ cuando $x > 0$;

e) $x + \frac{x^3}{3} < \operatorname{tg} x$ cuando $0 < x < \pi/2$.

Ilústrense estas desigualdades en forma geométrica.

35. Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ están definidas y son derivables n veces para $x \geqslant x_0$, además $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$; $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$ para $x > x_0$. Demuéstrese que $f(x) > g(x)$ para $x > x_0$.

36. Demuéstrese que si una función es derivable, pero no está acotada en un intervalo, su derivada tampoco está acotada en este intervalo. Adúzcase un ejemplo que muestre que la afirmación inversa no es cierta.

37. ¿Será válida la fórmula de Cauchy para las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ en el segmento $[-1, 1]$? ¿Qué condición del teorema de Cauchy no está cumplida para estas funciones?

38. Supongamos que la función $f(x)$ satisface las condiciones: 1) $f(x)$ es continua en $[a, b]$; 2) $f(x)$ es derivable en (a, b); 3) $f(x)$ no es una función lineal. Demuéstrese que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $|f(b) - f(a)| < |f'(c)| \cdot |b - a|$.

39. Supongamos que la función $f(x)$ satisface las condiciones: 1) $f(x)$ es dos veces derivable en $[a, b]$; 2) $f'(a) = f'(b) = 0$. Demuéstrese que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $|f(b) - f(a)| \leqslant (1/4)(b - a)^2 |f''(c)|$.

40. En el tiempo t s un punto recorrió por una recta la distancia de p m. En los instantes inicial y final la velocidad del punto es igual a cero. Demuéstrese que en cierto instante el valor absoluto de la aceleración del punto fue no menor que $4p/t^2$ m/s^2.

§ 4. Regla de L'Hospital

I. Conceptos y teoremas fundamentales

Teorema 13. *Sea que están cumplidas las siguientes condiciones:*

1ª) *las funciones $f(x)$ y $g(x)$ están definidas y son derivables en cierto entorno del punto a (a excepción, puede ser, del propio punto a);*

2ª) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;

3ª) $g'(x) \neq 0$ *en el entorno indicado del punto a (a excepción, puede ser, del propio punto a);*

4ª) *existe* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Entonces existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *y éste es igual a* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

OBSERVACIÓN. Si todas las condiciones del teorema 13 están cumplidas en el semientorno derecho (izquierdo) del punto a, entonces el teorema es válido respecto al límite derecho (izquierdo) de la función $f(x)/g(x)$ en el punto a.

Teorema 14. *Supongamos que están cumplidas las condiciones:*

1ª) *las funciones $f(x)$ y $g(x)$ están definidas y son derivables en la semirrecta $(a, +\infty)$;*

2ª) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

3ª) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, +\infty)$;

4ª) *existe* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Entonces existe $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *y éste es igual a* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

OBSERVACIÓN. Si la 4ª condición en los teoremas 13 y 14 se sustituye por la condición $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$ (a es un número o el símbolo $+\infty$), resulta que $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

Los teoremas 13 y 14 permiten calcular los límites indeterminados del tipo 0/0.

Teorema 15. *Si están cumplidas las condiciones 1ª, 3ª y 4ª de los teoremas 13 y 14, y en vez de la 2ª condición se cumple la condición de* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ *(a es un número o el símbolo $+\infty$), entonces existe* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *y éste es igual a* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

El teorema 15 permite calcular los límites indeterminados del tipo ∞/∞. También es cierto respecto a los límites laterales.

Cada uno de los teoremas 13—15 se llama REGLA DE L'HOSPITAL.

Las expresiones indeterminadas de otros tipos ($0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 1^∞; 0^0; ∞^0) pueden reducirse a las indeterminaciones del tipo 0/0 ó ∞/∞ y luego emplear la regla de L'Hospital.

II. Preguntas y tareas de control

1. Enúnciese la regla de L'Hospital para calcular los límites indeterminados del tipo: a) 0/0 cuando $x\to a$; b) 0/0 cuando $x\to+\infty$ c) ∞/∞ cuando $x\to a$; d) ∞/∞ cuando $x\to+\infty$.
2. Supongamos que estén cumplidas las condiciones 1ª—3ª del teorema 13 (o del teorema 14, o bien del teorema 15) y que no exista $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. ¿Se podrá deducir de aquí que no existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$? Examínense los ejemplos:
   a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{sen} x}{2x+\operatorname{sen} x}$.

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{tg}\beta x}$.

△ El límite dado es una expresión indeterminada del tipo 0/0. Comprobemos la posibilidad de que se cumplan las condiciones del teorema 13:

1ª) las funciones $\operatorname{sen}\alpha x$ y $\operatorname{tg}\beta x$ están definidas y son derivables en cierto entorno del punto $x=0$;

2ª) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}\alpha x=\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}\beta x=0$;

3ª) $(\operatorname{tg}\beta x)' = \frac{\beta}{\cos^2\beta x} \neq 0$ 0 en el entorno del punto $x=0$;

4ª) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen}\alpha x)'}{(\operatorname{tg}\beta x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha\cos\alpha x}{\frac{\beta}{\cos^2\beta x}} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Por consiguiente, según el teorema 13, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{tg}\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$. ▲

A veces para calcular los límites indeterminados resulta necesario aplicar la regla de L'Hospital sucesivamente unas cuantas veces, como en el caso siguiente.

2. Hallar

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x - x}{x^3}. \tag{1}$$

△ Este límite es una expresión indeterminada del tipo 0/0. Las condiciones 1ª—3ª del teorema 13 están cumplidas, y el límite de la relación de las derivadas

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg}x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} \tag{2}$$

también es una expresión indeterminada del tipo 0/0.

Para el límite (2) están cumplidas las condiciones 1ª—3ª del teorema 13 y el límite de la relación de las derivadas

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos^{-3}x\operatorname{sen}x}{6x}, \tag{3}$$

de nuevo es una expresión indeterminada del tipo 0/0.

Para calcular esta expresión indeterminada también se puede recurrir a la regla de L'Hospital, puesto que para el límite (3) las condiciones 1ª—3ª del teorema 13 están cumplidas y el límite de la relación de las derivadas es

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2\cos^{-3}x\operatorname{sen}x)'}{(6x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{6\cos^{-4}x\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^{-2}x}{6} = \frac{1}{3}. \tag{4}$$

Así, pues, en virtud de (2)—(4) el límite buscado (1) es igual a 1/3.

3. Hallar $\lim\limits_{x\to +0} x^x$.

△ El límite dado es una expresión indeterminada del tipo 0^0. Representemos x^x en forma de $e^{x\ln x}$ y examinemos $\lim\limits_{x\to +0}(x\ln x)$. Este límite es una expresión indeterminada del tipo $0\cdot\infty$. Al anotar $x\ln x$ en forma de $\frac{\ln x}{(1/x)}$, llegamos a una expresión indeterminada del tipo ∞/∞. No es difícil comprobar que para $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln x}{(1/x)}$ están cumplidas todas las condiciones del teorema 15

para los límites laterales (compruébelo por su propia cuenta). Empleando la regla la de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{(1/x)}=\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to+0}(-x)=0.$$

De aquí se desprende que $\lim\limits_{x\to+0} x^x=\lim\limits_{x\to+0} e^{x\ln x}=e^0=1$. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

Hállense los límites:

41. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}\ (\alpha>0)$. **42.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}\ (\alpha>0,\ a>1)$.

43. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{sen}\beta x}$. **44.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{\operatorname{sen}x-x}$.

45. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}$. **46.** $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}2x$.

47. $\lim\limits_{x\to3\pi/4}\frac{1+\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}}{1-2\cos^2x}$. **48.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arcsen}x}{x}$.

49. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\arccos x}$. **50.** $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln(\operatorname{sen}\alpha x)}{\ln(\operatorname{sen}\beta x)}\ (\alpha>0,\ \beta>0)$.

51. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(\operatorname{sen}x)-\cos x}{x^4}$. **52.** $\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^{-1/x}}{x^\alpha}\ (\alpha>0)$.

53. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$. **54.** $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$.

55. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$. **56.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x}$.

57. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^{1/x^2}$. **58.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^{1/x^2}$.

59. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$. **60.** $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

61. $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)$. **62.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$.

63. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^x}{x-a}$. **64.** $\lim\limits_{x\to1-0}(\arccos x)^{1-x}$.

§ 5. Fórmula de Taylor

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Polinomio de Taylor. Sea una función $f(x)$ n veces derivable en el punto x_0. El polinomio

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

se llama *polinomio de Taylor* para la función $f(x)$ (con el centro en el punto x_0). Este polinomio posee la siguiente propiedad:

$$P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0) \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

El papel que desempeña el polinomio de Taylor lo descubre el teorema siguiente.

Teorema 16. *Si una función $f(x)$ está definida en cierto entorno del punto x_0 y es n veces derivable en este punto, tendremos que*

$$f(x)=P_n(x)+R_{n+1}(x), \tag{1}$$

donde $R_{n+1}(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$.

La fórmula (1) se llama FÓRMULA DE TAYLOR para la función $f(x)$ con el centro en el punto x_0 y el *término residual o complementario $R_{n+1}(x)$ en forma de Peano.*

2. Diferentes formas del término residual.

Teorema 17. *Supongamos que una función $f(x)$ está definida y es $n+1$ veces derivable en cierto entorno del punto x_0. Sea x un valor arbitrario del argumento en este entorno; $p>0$, un número arbitrario. Entonces existe un punto $\xi\in(x_0,\ x)$ tal que*

$$R_{n+1}(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p}\left(\frac{x-x_0}{x-\xi}\right)^p f^{(n+1)}(\xi). \tag{2}$$

La expresión (2) se llama *forma general del término residual (complementario).*

Los casos particulares más importantes de la forma general del término complementario son los siguientes:

a) *la forma de Lagrange* ($p=n+1$);

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)) \quad (0<\theta<1),$$

b) *la forma de Cauchy* ($p=1$):

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)) \quad (0<\theta<1).$$

3. Principales desarrollos. Si $x_0=0$, la fórmula de Taylor suele llamarse FÓRMULA DE MACLAURIN. Los desarrollos más importantes según la fórmula de Maclaurin son

I. $e^x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_{n+1}(x).$

II. $\operatorname{sen} x=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2n+1}(x).$

III. $\cos x=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+R_{2n+2}(x).$

IV. $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+R_{n+1}(x).$

V. $(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+R_{n+1}(x).$

II. Preguntas y tareas de control

1. ¿Qué se llama polinomio de Taylor para la función $f(x)$ con el centro en el punto x_0? ¿Qué propiedad tiene?
2. Enúnciese el teorema sobre la fórmula de Taylor con el término residual (complementario): a) en la forma de Peano; b) en la forma general. ¿En qué difieren las condiciones de estos teoremas? ¿Las condiciones de qué teorema se desprenden a partir de las condiciones de otro?
3. Dedúzcanse de la forma general del término residual las formas de Lagrange y de Cauchy. Obténgase la forma de Peano del término complementario partiendo de la forma de Lagrange.
4. Anótense la fórmula de Maclaurin para la función $f(x)$ y los términos residuales de la misma en las formas de Peano, Lagrange y Cauchy.
5. Escríbanse los principales desarrollos y los términos complementarios de estos desarrollos en las formas de Peano, de Lagrange y de Cauchy.

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Descomponer la función $\operatorname{tg} x$ según la fórmula de Maclaurin hasta el término con x^3 inclusive.

△ Hallemos las derivadas de la función $f(x)=\operatorname{tg} x$ hasta el tercer orden inclusive:

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=\cos^{-2}x;$$

$$f''(x)=2\cos^{-3}x\operatorname{sen}x;$$

$$f'''(x)=6\cos^{-4}x\operatorname{sen}^2x+2\cos^{-2}x.$$

De aquí se obtiene $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=2$. Según la fórmula de Maclaurin con el término complementario en forma de Peano tenemos

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

Advirtamos que el cálculo de $f^{(4)}(x)$ da $f^{(4)}(0)=0$. Por eso el término complementario puede escribirse en la forma de $o(x^4)$. ▲

2. Descomponer la función $f(x)=\ln\cos x$ según la fórmula de Maclaurin hasta el término con x^4 inclusive.

△ Aquí no hay necesidad de calcular las derivadas de $f(x)$ hasta el cuarto orden, ya que podemos utilizar los principales desarrollos III y IV. Valiéndonos del desarrollo III, obtenemos

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \ln(1+t),$$

donde $t = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.

Ahora recurramos al desarrollo principal IV.

$$\ln\cos x = \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) -$$
$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o\left(\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2\right) =$$
$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4). \ ▲$$

3. Estimar el error absoluto de la fórmula aproximada

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = P_n(x) \qquad (3)$$

cuando $0 \leqslant x \leqslant 1$.

△ Para poder apreciar el error absoluto hace falta estimar el término complementario $R_{n+1}(x) = e^x - P_n(x)$. Este término $R_{n+1}(x)$ en forma de Lagrange para la función e^x tiene la forma de $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$ $(0 < \theta < 1)$. De aquí obtenemos

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{e}{(n+1)!}, \text{ cuando } 0 \leqslant x \leqslant 1. \qquad (4)$$

Precisamente esto es el valor buscado del error absoluto de la fórmula aproximada (3) cuando $0 \leqslant x \leqslant 1$. ▲

4. Con ayuda de la expresión (4) resolver el siguiente problema: ¿cuántos términos deben tomarse en la fórmula (1) para $x = 1$, con el fin de calcular el número e con precisión de hasta 10^{-6}?

△ No es difícil calcular que $10! > 3 \cdot 10^6$. Por eso $\frac{e}{10!} < \frac{3}{3 \cdot 10^6} = 10^{-6}$. De esta manera, es suficiente en la fórmula (3) para $x = 1$ hacer $n = 9$, con el fin de obtener el número e con precisión de hasta 10^{-6}. ▲

5. Empleando los desarrollos principales, hallar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x + 2\operatorname{sen} x - 3x}{x^4}.$$

△ Tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x + 2\operatorname{sen} x - 3x}{x^4} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) + 2\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - 3x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = 0. \ ▲$$

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

65. Descompóngase la función $f(x)$ según la fórmula de Maclaurin hasta el término del orden indicado, inclusive:

a) $f(x)=e^{-x}$ hasta el término con x^n; b) $f(x)=e^{2x-x^2}$ hasta el término con x^5; c) $f(x)=\operatorname{sen}\operatorname{sen}x$ hasta el término con x^3; d) $f(x)=\cos\operatorname{sen}x$ hasta el término con x^4; e) $f(x)=\ln\frac{\operatorname{sen}x}{x}$ hasta el término con x^6; f) $f(x)=\sqrt[3]{\operatorname{sen}x^3}$ hasta el término con x^{13}; g) $f(x)=\sqrt[n]{a^n+x}$ hasta el término con $x^2\ (a>0)$; h) $f(x)=\sqrt{1-x+2x^2}$ hasta el término con x^3.

66. Escríbase la descomposición según la fórmula de Taylor con el centro en el punto $x=1$ de la función:

a) $f(x)=x^2$; b) $f(x)=\sqrt{x}$ hasta el término con $(x-1)^3$.
c) $f(x)=\operatorname{sen}(\pi x/2)$ hasta el término con $(x-1)^4$.

67. Estímese el error absoluto de las fórmulas aproximadas;

a) $\operatorname{sen}x\approx x-\frac{x^3}{6}$, cuando $|x|\leqslant\frac{1}{2}$;

b) $\operatorname{tg}x\approx x+\frac{x^3}{3}$, cuando $|x|\leqslant 0{,}1$;

c) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$, cuando $0\leqslant x\leqslant 1$.

68. Con ayuda de la fórmula de Taylor hállense los valores aproximados de: a) $\sqrt[3]{9}$ con precisión de hasta 10^{-3}; b) $\sqrt[4]{90}$ con precisión de hasta 10^{-4}; c) $\operatorname{sen}18^\circ$ con precisión de hasta 10^{-4}; d) $\operatorname{sen}1^\circ$ con precisión de hasta 10^{-8}; e) $\ln 1{,}1$ con precisión de hasta 10^{-3}; f) $e^{0,2}$ con precisión de hasta 10^{-5}; g) $\cos 6^\circ$ con precisión de hasta 10^{-5}.

69. Empleando los desarrollos principales, hállense los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x-2\operatorname{tg}x}{\ln(1+x^3)}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x+1}-\sqrt{e^x-1}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{3/2}(\sqrt{x+1})+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)$; h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\operatorname{sen}x-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

Capítulo VII
Estudio del comportamiento de las funciones y construcción de las gráficas

§ 1. Construcción de las gráficas de las funciones explícitas

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Asíntotas de la gráfica de una función. Una función dada por medio de la relación $y = f(x)$, $x \in D(f)$ recibe el nombre de función *explícita*.

DEFINICIÓN. *La recta $x = c$ se llama* ***asíntota vertical*** *de la gráfica de la función $y = f(x)$, si por lo menos uno de los límites $\lim\limits_{x \to c-0} f(x)$ o $\lim\limits_{x \to c+0} f(x)$ es igual a $+\infty$ o $-\infty$.*

DEFINICIÓN. *La recta $y = kx + b$ se llama* ***asíntota inclinada (oblicua)*** *de la gráfica de la función $y = f(x)$, cuando $x \to +\infty$, si esta función es representable en forma de $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, donde $\alpha(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$.*

Teorema 1. *Para que la recta $y = kx + b$ sea una asíntota oblicua de la gráfica de la función $y = f(x)$, cuando $x \to +\infty$, es necesario y suficiente que existan lo límites*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k; \quad \lim_{x \to +\infty} |f(x) - kx| = b.$$

De manera análoga se introduce el concepto de la asíntota oblicua de la gráfica de la función cuando $x \to -\infty$.

2. Funciones pares, impares, periódicas.

DEFINICIÓN. *Una función $y = f(x)$ se llama* ***par***, *si*

$$\forall x \in D(f): f(x) = f(-x).$$

DEFINICIÓN. *Una función $y = f(x)$ se llama* ***impar***, *si*

$$\forall x \in D(f): f(x) = -f(-x).$$

DEFINICIÓN. *Una función $y = f(x)$ se llama* ***periódica***, *si existe un número $T \neq 0$, denominado* ***período*** *de la función $y = f(x)$, tal que*

$$\forall x \in D(f): f(x) = f(x + T) = f(x - T).$$

Por lo común bajo el período de la función se entiende el menor de los períodos positivos, si éste período existe.

3. Extremo local de la función. Sea una función $y = f(x)$ definida en cierto entorno del punto x_0.

DEFINICIÓN. *Se dice que la función $y = f(x)$ tiene en el punto x_0 un* ***(máximo) mínimo local***, *si existe un entorno del punto x_0 tal en el que para $x \neq x_0$ se cumple la desigualdad $f(x) < f(x_0)$ [respectiva-*

mente $f(x) > f(x_0)$]. El máximo y el mínimo locales se unen bajo el nombre común del *extremo local* (o simplemente *extremo*).

Teorema 2 (CONDICIÓN NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMO). *Si una función $y = f(x)$ tiene en el punto x_0 un extremo, entonces la derivada $f'(x)$ en el punto x_0 o bien es igual a cero o bien no existe.*

Los valores del argumento de la función $y = f(x)$, para los cuales la derivada de la función o bien es igual a cero, o bien no existe, pero la propia función es continua, reciben el nombre de *puntos del extremo posible.*

Teorema 3 (PRIMERA CONDICIÓN SUFICIENTE PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMO). *Sea una función $y = f(x)$ derivable en cierto entorno del punto x_0 del extremo posible (a excepción, puede ser, del propio punto x_0). Entonces, si al pasar a través del punto x_0 (en dirección del crecimiento de x) la derivada $f'(x)$ cambia el signo de más a menos (del menos al más), resulta que en el punto x_0 la función $y = f(x)$ tiene un máximo (mínimo) local. Si al pasar a través del punto x_0 la derivada de la función no cambia de signo, quiere decir que en el punto x_0 la función $y = f(x)$ no tiene extremo.*

Teorema 4 (SEGUNDA CONDICIÓN SUFICIENTE PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMO). *Supongamos que en el punto x_0 del extremo posible la función $y = f(x)$ tiene la derivada segunda. Entonces, si $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$), resulta que la función $y = f(x)$ tiene en el punto x_0 un máximo (mínimo) local.*

4. Dirección de la convexidad y puntos de inflexión de la gráfica de una función. Supongamos que una función $y = f(x)$ tiene en cada punto del intervalo (a, b) una derivada finita. Entonces en cada punto $M(x, f(x))$, $x \in (a, b)$ la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene una tangente que no es paralela al eje Oy.

DEFINICIÓN. *Se dice que la gráfica de una función tiene en un intervalo (a, b)* ***la convexidad orientada hacia abajo (hacia arriba)***, *si dentro de los límites del intervalo (a, b) la gráfica está situada debajo (encima) de toda tangente.*

Teorema 5. *Si en un intervalo (a, b) existe la derivada segunda de la función $y = f(x)$ y si esta derivada no es negativa (no es positiva) en todos los puntos de este intervalo, entonces la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene en el intervalo (a, b) la convexidad orientada hacia abajo (hacia arriba).*

DEFINICIÓN. *El punto $M(c, f(c))$ de la gráfica de la función $y = f(x)$ se llama* ***punto de inflexión*** *de esta gráfica, si en este punto la gráfica de la función tiene una tangente, y existe tal entorno del punto c, dentro de cuyos límites a la izquierda y a la derecha del punto c las direcciones de la convexidad de la gráfica de la función $y = f(x)$ son diferentes.* Se dice también que en el punto $M(c, f(c))$ la gráfica de la función tiene *un punto de inflexión.*

Teorema 6 (CONDICIÓN NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE UN PUNTO DE INFLEXIÓN). *Si la gráfica de una función $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto $M(c, f(c))$ y la derivada segunda $f''(x)$ es continua en el punto c, entonces $f''(c) = 0$.*

Teorema 7 (CONDICIÓN SUFICIENTE PARA LA EXISTENCIA DE UN PUNTO DE INFLEXIÓN). *Si en cierto entorno de un punto c existe la derivada segunda de la función $y = f(x)$, además $f''(c) = 0$, y dentro de los límites de este entorno a la izquierda y a la derecha del punto c los signos de $f''(x)$ son diferentes, entonces la gráfica de la función tiene un punto de inflexión en el punto $M(c, f(c))$.*

5. Esquema para construir la gráfica de la función $y = f(x)$.

1°. Se hallan el campo de definición de la función y los valores de ésta en los puntos de discontinuidad y en los de frontera del campo de definición.

Si en el punto c la función tiene discontinuidad, además $f(c + 0)$ o $f(c - 0)$ tiende al infinito, quiere decir que $x = c$ es la asíntota vertical de la gráfica de la función $y = f(x)$.

Cuando una función está definida en una semirrecta o en toda la recta numérica, es necesario determinar (con ayuda del teorema 1), si la gráfica de la función tiene o no asíntotas oblicuas. Cuando éstas no existen hace falta investigar, si la función está acotada para $x \to \infty$ o no acotada (en el último caso, si éste es infinitamente grande para $x \to \infty$ y qué signo tiene).

2°. Se establece si la función es par, impar, periódica.

Este punto sirve para reducir los cálculos. En efecto, si la función es par o impar, quiere decir que en vez de todo el campo de definición es suficiente examinar sólo aquella parte suya que pertenece al semieje positivo de abscisas. En esta parte del campo de definición hay que realizar el estudio completo de la función y construir su gráfica y luego, utilizando la simetría, terminar su construcción en todo el campo de definición.

Si la función es periódica, será suficiente investigar la función en cualquier segmento, cuya longitud es igual al período de la función, y luego, después de construir la gráfica en este segmento, propagarla a todo el campo de definición de la función.

3°. Se hallan los ceros de la función, es decir, se soluciona la ecuación $f(x) = 0$. Estas soluciones y los puntos de discontinuidad de la función dividen su campo de definición en intervalos con signos constantes de la función.

4°. Se hallan los extremos locales y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función (en la gráfica los puntos extremos los designaremos con un «circulito»: ○).

5°. Se determinan los intervalos en que se conserva la dirección de convexidad y los puntos de inflexión de la gráfica de la función (en la gráfica los puntos de inflexión se notan con una «cruz»: × o +).

II. Preguntas y tareas de control

1. Dése la definición y adúzcase un ejemplo de una asíntota vertical para la gráfica de una función.
2. Enúnciese la definición y adúzcase un ejemplo de una asíntota oblicua para la gráfica de una función cuando $x \to +\infty$ (cuando $x \to -\infty$).

3. Enúnciese el teorema que expresa las condiciones necesarias y suficientes de existencia de la asíntota oblicua para la gráfica de una función.
4. Adúzcanse ejemplos de una función, en la cual existen asíntotas oblicuas de la gráfica para $x \to +\infty$ y para $x \to -\infty$, además estas asíntotas: a) coinciden; b) no coinciden.
5. Dése la definición del extremo local de una función.
6. ¿Qué son los puntos de extremo posible de una función?
7. Enúnciese el teorema que expresa la condición necesaria de existencia del extremo: a) de una función arbitraria; b) de una función derivable. Demuéstrese en un ejemplo que esta condición no es suficiente.
8. Enúnciense los teoremas que expresan las condiciones suficientes para la existencia del extremo de la función.
9. Dése la definición de la dirección de convexidad de la gráfica de una función.
10. Dése la definición del punto de inflexión de la gráfica de una función.
11. ¿Puede cambiar la dirección de convexidad de la gráfica de una función al pasar a través de un punto que no sea el punto de inflexión? Adúzcanse ejemplos.
12. Enúnciese la condición necesaria para la existencia del punto de inflexión de la gráfica de una función. Demuéstrese en un ejemplo que esta condición no es suficiente.
13. Enúnciese la condición suficiente para la existencia del punto de inflexión de la gráfica de una función.
14. Adúzcase el esquema para construir la gráfica de la función $y = f(x)$.

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Construir la gráfica de la función $y = \arcsen \frac{2x}{1+x^2}$.

△ 1°. La función está definida en aquellos valores de x para los cuales, como se deduce de la definición del arco seno, resulta cumplida la desigualdad $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leqslant 1$. Ésta es equivalente a la desigualdad $(1-|x|)^2 \geqslant 0$. La última es cierta para todos x reales. Así, pues, $D(f) = \mathbf{R}$. La función $\frac{2x}{1+x^2}$ es continua en cualquier punto (como el cociente de dos funciones continuas). Por eso la función $\arcsen \frac{2x}{1+x^2}$ también es continua en todo punto (como la superposición de funciones continuas) y, por consiguiente, la gráfica de la función no tiene asíntotas verticales. Para encontrar la asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$, calculemos los límites siguientes:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \arcsen \frac{2x}{1+x^2} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - k(x)] = \lim_{x\to+\infty} \arcsen \frac{2x}{1+x^2} = \arcsen 0 = 0.$$

De aquí se deduce que la recta $y = 0$ es una asíntota cuando $x \to +\infty$ (más correcto será llamarla horizontal, y no oblicua). De manera análoga se puede establecer que esta misma recta $y = 0$ es asíntota cuando $x \to -\infty$.

2°. Es evidente que la función no es periódica pero es impar. Por eso en vez de todo el campo de definición es suficiente estudiar la semirrecta $[0, +\infty)$.

3°. Tenemos $y = 0$ cuando $x = 0$. La función no tiene otros ceros ni tampoco puntos de discontinuidad. En la semirrecta $(0, +\infty)$ la función es positiva.

4°. Hallemos los puntos del extremo posible en la semirrecta $[0, +\infty)$. Calculemos la derivada de la función cuando $x \neq 1$:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1+x^2}{|1-x^2|} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2\,\mathrm{sgn}\,(1-x^2)}{1+x^2}.$$

De aquí se desprende que la derivada no se anula en ninguno de los puntos. Puesto que $y'(1+0) = -1$, $y'(1-0) = 1$, quiere decir que en el punto $x = 1$ la derivada no existe. El signo de la derivada, al pasar a través del punto $x = 1$, cambia del más al menos. Por eso en el punto $x = 1$ la función tiene un máximo local, además $y(1) = \arcsen 1 = \pi/2$. Señalemos que en el punto $x = 1$ la función es continua y su derivada tiene una discontinuidad de I especie. En este caso el punto correspondiente de la gráfica [en el ejemplo dado es el punto $(1, \pi/2)$] se llama *punto anguloso*. Los intervalos de monotonía de la función se determinan por el signo de la derivada: $y' > 0$ cuando $0 \leqslant x < 1$, $y' < 0$ cuando $x > 1$.

5°. Puesto que la derivada segunda

$$y'' = \frac{-4x\,\mathrm{sgn}\,(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad x \neq 1,$$

se anula sólo cuando $x = 0$ y al pasar a través del punto $x = 0$ y'' cambia de signo, resulta que en el punto $(0, y(0)) = (0, 0)$ la gráfica de la función tiene un punto de inflexión. La dirección de la convexidad se determina por el signo de la derivada segunda: $y'' < 0$ cuando $0 \leqslant x < 1$, $y'' > 0$ cuando $x > 1$.

El estudio de la función se ha terminado. Antes de construir la gráfica es cómodo representar en un esquema los resultados de la investigación, en particular, los intervalos con signo constante de la función, de la derivada primera y' y de la derivada segunda y'':

Inflexión
y — 0 — + — máx — x
y' — 0 — + — 1 — − — x
y'' — 0 — − — 1 — + — x

Ahora, leyendo la información dada en el esquema, podemos construir la gráfica de la función en el intervalo $[0, +\infty)$. En el segmento $[0, 1]$: a) la función crece desde el valor $y = 0$ cuando $x = 0$, hasta el valor $y = \pi/2$ cuando $x = 1$; b) la convexidad está orientada hacia arriba. Luego en la semirrecta $[1, +\infty)$: a) la función decrece, permaneciendo positiva; b) la convexidad está dirigida hacia abajo; c) cuando $x \to +\infty$, la gráfica se aproxima a la asíntota que es el eje Ox. Cabe advertir que al pasar a través del punto $x = 1$, cambia la dirección de la convexidad de la gráfica, pero el punto $(1, \pi/2)$ no es un punto de inflexión, sino un punto anguloso (fig. 6).

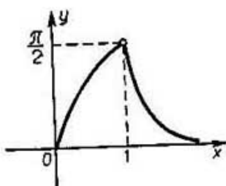


Fig. 6.

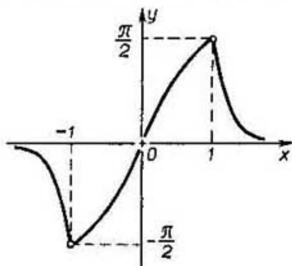


Fig. 7.

Por último, utilizando la imparidad de la función, terminamos la construcción de la gráfica en todo el campo de su definición (fig. 7). ▲

OBSERVACIÓN. Si la curva está dada mediante la ecuación $\Phi(x, y) = 0$ y además esta última se logra resolver respecto a y o bien x, la construcción de la curva se reduce a la construcción de las gráficas de funciones explícitas.

2. Construir la curva dada mediante la ecuación $y^2 - \operatorname{sen}^4 x = 0$.

△ Esta ecuación $\forall x \in \mathbf{R}$ tiene dos soluciones respecto a y: $y = \operatorname{sen}^2 x$ e $y = -\operatorname{sen}^2 x$, que son funciones explícitas determinadas en toda la recta numérica. Las gráficas de estas funciones son simétricas respecto al eje Ox. Por eso es suficiente construir la gráfica de la primera función y luego, valiéndose de la simetría, trazar toda la curva. Así, pues, el problema se reduce a la construcción de la gráfica de la función explícita $y = \operatorname{sen}^2 x$, que la escribiremos en la forma siguiente

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Esta función la examinaremos ateniéndonos al esquema expuesto más arriba.

1°. Tenemos $D(y) = \mathbf{R}$.

2°. La función $y(x)$ es periódica con el período $T = \pi$. Por eso, para construir la gráfica de la función, es suficiente estudiar un segmento del eje Ox de longitud π, por ejemplo $[-\pi/2, \pi/2]$. Ya que

$y(x)$ además es par, podemos limitarnos al segmento $[0, \pi/2]$.

3°. Hallemos los ceros de la función en el segmento $[0, \pi/2]$; tenemos $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = 0$ cuando $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, pero de todas estas resoluciones al segmento $[0, \pi/2]$ pertenece sólo $x = 0$. La función no tiene puntos de discontinuidad. En el intervalo $(0, \pi/2]$ la función es positiva.

4°. Encontremos $y' = \operatorname{sen} 2x$. En el segmento $[0, \pi/2]$ la derivada es igual a cero cuando $x = 0$ y $x = \pi/2$. Acto seguido $y' > 0$

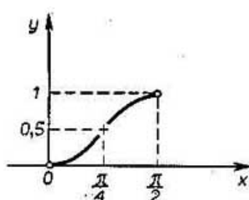


Fig. 8.

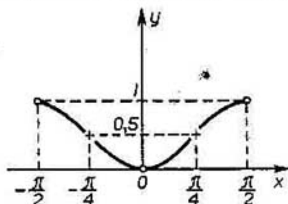


Fig. 9.

cuando $0 < x < \pi/2$, $y' < 0$ cuando $x < 0$ y $x > \pi/2$. Según el teorema 3 la función tiene un máximo local en el punto $\pi/2$, además $y(\pi/2) = 1$, y un mínimo local en el punto $x = 0$, con la particularidad de que $y(0) = 0$. Todo el segmento $[0, \pi/2]$ es un intervalo de crecimiento de la función.

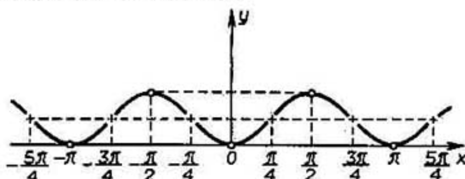


Fig. 10.

5°. Tenemos $y'' = 2\cos 2x$. En el segmento $[0, \pi/2]$ la derivada segunda se reduce a cero cuando $x = \pi/4$. Al pasar a través de este punto y'' cambia de signo. Por consiguiente, según el teorema 7, la gráfica de la función tiene en el punto $(\pi/4, y(\pi/4)) = (\pi/4, 1/2)$ un punto de inflexión. De esta manera ahora podemos trazar el esquema siguiente:

y: 0 + $\pi/2$ + → x; mín, máx
y': − + − → x; 0, $\pi/2$
y'': + + − − → x; 0, $\pi/4$, $\pi/2$

Leyendo la información en el esquema, construimos la gráfica de la función en el segmento $[0, \pi/2]$ (fig. 8). Haciendo uso de la paridad de la función, terminamos la construcción de su gráfica en el segmento $[-\pi/2, \pi/2]$ (fig. 9).

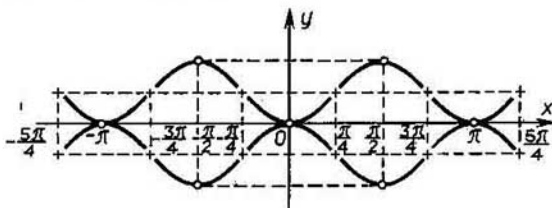


Fig. 11.

Tomando en consideración la periodicidad de la función, trazamos su gráfica en todo el campo de definición (fig. 10).

Por último, teniendo en cuenta la simetría de la curva inicial respecto al eje Ox, obtenemos toda la curva (fig. 11). ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

Constrúyanse las gráficas de las funciones explícitas:

1. $y = 1 + x^2 - 0{,}5x^4$. **2.** $y = (x+1)(x-2)^2$.

3. $y = 0{,}4x - 0{,}5x^3 + 0{,}1x^5$. **4.** $y = (1-x^2)^{-1}$.

5. $y = x^4(1+x)^{-3}$. **6.** $y = (1+x)^4(1-x)^{-4}$.

7. $y = x^2(x-1)(x+1)^{-2}$. **8.** $y = x(1-x^2)^{-2}$.

9. $y = 2x - 1 + (x+1)^{-1}$. **10.** $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$.

11. $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$. **12.** $y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$.

13. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)$. **14.** $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

15. $y = \operatorname{arctg}(1/x)$. **16.** $y = (x+2)e^{1/x}$.

17. $y = 0{,}5(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})$.

18. $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$. **19.** $y = (x+2)^{2/3} - (x-2)^{2/3}$.

20. $y = (x+1)^{2/3} + (x-1)^{2/3}$.

Constrúyanse las curvas dadas mediante las ecuaciones:

21. $y^2 = 8x^2 - x^4$. **22.** $y^2 = (x-1)(x-2)(x-3)$.

23. $y^2 = (x-1)(x+1)^{-1}$. **24.** $y^2 = x^2(1-x)(2+x)^{-2}$.

25. $y^2 = x^4(x+1)$. **26.** $x^2(y-2)^2 + 2xy - y^2 = 0$.

§ 2. Estudio de las curvas planas dadas en forma paramétrica

I. Esquema de investigación de la curva

Las ecuaciones paramétricas de una curva plana tienen la forma

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in T. \tag{1}$$

El estudio y la construcción de semejante curva puede realizarse recurriendo al siguiente esquema.

1°. Se halla el conjunto T, o sea, la parte común de los campos de definición de las funciones $x(t)$, $y(t)$ (si el conjunto T no está dado), señalando, en particular, aquellos valores del parámetro t_l (incluyendo $t_l = \pm\infty$), para los cuales por lo menos uno de los límites laterales $\lim\limits_{t \to t_l \pm 0} x(t)$, $\lim\limits_{t \to t_l \pm 0} y(t)$ es igual a $+\infty$ o $-\infty$.

2°. Se determina si la curva posee simetría, lo que permitirá reducir los cálculos.

3°. Se hallan los valores nulos de las funciones $x(t)$, $y(t)$ y los intervalos donde estas funciones poseen signos constantes.

4°. Se hallan los puntos t_k, en los cuales por lo menos una de las derivadas $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ es nula o discontinua. Cabe señalar que los puntos t_l, mencionados en el p. 1°, y los puntos t_k encontrados en este párrafo, dividen el conjunto T en intervalos de constancia de signo de las derivadas $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$. Por eso en cada semejante intervalo (t_p, t_{p+1}) la función $x(t)$ es estrictamente monótona y, por consiguiente, el sistema de ecuaciones (1) en el intervalo (t_p, t_{p+1}) da en forma paramétrica la función del tipo $y = f(x)$ (véase el § 1, cap. IV). Las derivadas de esta función se expresan con las fórmulas

$$f' = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}, \quad f'' = \frac{\frac{d}{dt}(f')}{\dot{x}(t)}.$$

La parte de la curva, correspondiente al cambio del parámetro t desde t_p hasta t_{p+1}, la llamaremos *rama* de la curva. Cada una de las ramas de la curva es la gráfica de una función del tipo $y = f(x)$.

5°. Se hallan los puntos t_j, en los cuales $f'' = 0$.

6°. Se escribe una tabla de la siguiente forma:

(t_p, t_{p+1})		...	
(x_p, x_{p+1})		...	
(y_p, y_{p+1})		...	
Signo de f''		...	

Aquí en la primera línea se escriben los intervalos de variación del parámetro t, como puntos de frontera de los cuales t_p y t_{p+1} sirven los puntos hallados en los pp. 1°, 4° y 5°. En las líneas segunda y tercera de la tabla se aducen los intervalos correspondientes de cambio de las variables x e y. En la última línea de la tabla se indica el signo de f'' que determina la dirección de la convexidad de la gráfica de la correspondiente rama de la curva.

7°. Utilizando la tabla, se trazan las ramas de la curva que corresponden a los intervalos (t_p, t_{p+1}).

OBSERVACIÓN 1. En el p. 1° del esquema se pueden hallar las asíntotas de la curva (si éstas existen). Para esto es necesario tener en cuenta lo siguiente:

a) si para $t \to t_p$ $(t \to t_p + 0$ ó $t \to t_p - 0)$ $x \to x_0$ e $y \to \infty$, entonces $x = x_0$ es la asíntota vertical de la curva;

b) si para $t \to t_p$ $(t \to t_p + 0$ ó $t \to t_p - 0)$ $x \to \infty$ e $y \to y_0$, quiere decir que $y = y_0$ es la asíntota horizontal de la curva;

c) si para $t \to t_p$ $(t \to t_p + 0$ ó $t \to t_p - 0)$ $x \to \infty$ e $y \to \infty$, resulta que puede existir una asíntota oblicua, cuya búsqueda ha de efectuarse en correspondencia con el teorema 1.

OBSERVACIÓN 2. Al estudiar la simetría de la curva (p. 2° del esquema) hace falta tomar en consideración cuatro casos, cuando en vez de todo el campo de definición T es suficiente examinar sólo su parte no negativa:

a) $\forall t \in T$: $x(t) = x(-t)$, $y(t) = -y(-t)$ (simetría respecto al eje Ox);

b) $\forall t \in T$: $x(t) = -x(-t)$, $y(t) = y(-t)$ (simetría respecto al eje Oy);

c) $\forall t \in T$: $x(t) = -x(-t)$, $y(t) = -y(-t)$ (simetría respecto al origen de coordenadas);

d) $\forall t \in T$: $x(t) = x(-t)$, $y(t) = y(-t)$ (superposición).

OBSERVACIÓN 3. Si t_p es el punto encontrado en el p. 4° del esquema y si en el intervalo (t_{p-1}, t_{p+1}) $\dot{x}(t)$ conserva el signo, esto significa que en este intervalo el sistema de ecuaciones (1) prefija en forma paramétrica una función de tipo $y = f(x)$, para la cual el punto $x(t_p)$ es un punto del extremo posible. La determinación de si $x(t_p)$ es el punto de extremo de la función $y = f(x)$, puede llevarse a cabo examinando la variación de y en los intervalos (t_{p-1}, t_p) y (t_p, t_{p+1}).

OBSERVACIÓN 4. En el curso de estudio de la curva puede ocurrir que se descubra uno de los puntos singulares característicos de la curva dada en forma paramétrica, a saber: un punto de retroceso (véase el ejemplo 2 en el p. III).

II. Preguntas y tareas de control

1. ¿Cómo se calculan las derivadas de una función dada en forma paramétrica?
2. Una curva viene dada en forma paramétrica: $x = \operatorname{sen}^2 t$, $y = \cos^2 t$. ¿Qué intervalo es suficiente estudiar, para que, al variar

el parámetro t en este intervalo, el punto $(x(t), y(t))$ se halle en cada punto de la curva sólo una vez?

3. ¿Cómo hallar las asíntotas de una curva dada en forma paramétrica?
4. ¿Cómo estudiar y emplear la simetría de una curva dada paramétricamente?
5. Enúnciese la condición necesaria del extremo local de una función dada en forma paramétrica.
6. Adúzcase el esquema de estudio y de construcción de una curva dada paramétricamente.

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Construir la curva dada en forma paramétrica:

$$x=\frac{t}{1-t^2},\quad y=\frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}.$$

△ 1°. Tenemos

$$t\in(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,\ +\infty),$$
$$x\in(0,\ +\infty)\cup(-\infty,\ +\infty)\cup(-\infty,\ 0),$$
$$y\in(-\infty,\ -\infty)\cup(+\infty,\ -\infty)\cup(+\infty,\ +\infty).$$

De aquí se deduce que $x=0$ es la asíntota vertical de la curva, en tanto que cuando $t\to-1$ y $t\to 1$ pueden existir asíntotas oblicuas. En efecto, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{t\to 1\pm 0}(1-2t^2)=-1$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y+x)=$ $=\lim\limits_{t\to 1\pm 0}2t=2.$

De manera análoga se encuentran los límites, para $t\to-1$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=-1;\quad \lim_{x\to\pm\infty}(y+x)=-2.$$

Así, pues, la curva tiene dos asíntotas: $y=-x+2$ e $y=-x-2$.

2°. Puesto que $x(t)=-x(-t)$, $y(t)=-y(-t)$, la curva tiene simetría respecto al punto $O(0, 0)$. Por eso es suficiente examinar en lo ulterior el conjunto $M=[0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$.

3°. En el conjunto M $x(t)=0$, cuando $t=0$; $y(t)=0$, cuando $t=0$, $t=1/\sqrt{2}$.

4°. $\dot{x}(t)=\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}$, $\dot{y}(t)=\frac{2t^4-5t^2+1}{(1-t^2)^2}$. En el conjunto M $\dot{x}(t)>$ >0, e $\dot{y}(t)=0$ cuando $t_1=0{,}5\sqrt{5-\sqrt{17}}\approx 0{,}47$ y $t_2=0{,}5\sqrt{5+\sqrt{17}}\approx$ $\approx 1{,}51$.

5°. $f'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{2t^4-5t^2+1}{1+t^2}$, $f''=\frac{\frac{d}{dt}(f')}{\dot{x}}=\frac{-4t(1-t^2)^3(3+t^2)}{(1+t^2)^3}$. De aquí $f''\leqslant 0$ cuando $t\in[0,\ 1)$; $f''>0$ cuando $t\in(1,\ +\infty)$.

6°. Escribimos la tabla:

(t_p, t_{p+1})	$(0; 0{,}47)$	$(0{,}47; 1)$	$(1; 1{,}51)$	$(1{,}51; +\infty)$
(x_p, x_{p+1})	$(0; 0{,}6)$	$(0{,}6; +\infty)$	$(-\infty; -0{,}7)$	$(-0{,}7; 0)$
(y_p, y_{p+1})	$(0; 0{,}3)$	$(0{,}3; -\infty)$	$(+\infty; 2{,}3)$	$(2{,}3; +\infty)$
Signo f''	+	+	−	−

7°. Construimos la parte de la curva que corresponde al conjunto M (fig. 12). Luego, utilizando la simetría de la curva, trazamos toda la curva (fig. 13). ▲

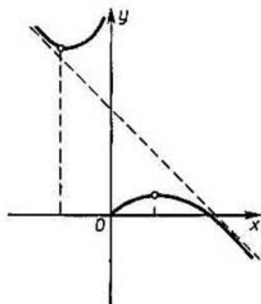


Fig. 12.

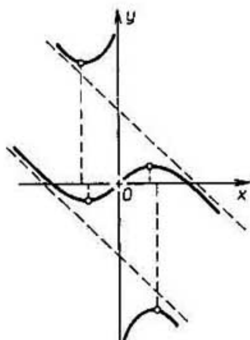


Fig. 13.

2. Construir una curva dada en forma paramétrica:

$$x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3. \tag{2}$$

△ 1°. Tenemos

$$t \in (-\infty, +\infty),$$
$$x \in (-\infty, -\infty),$$
$$y \in (+\infty, -\infty).$$

De esta manera, cuando $x \to -\infty$ $(t \to \pm\infty)$ pueden existir asíntotas oblicuas. Sin embargo, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{t \to \pm\infty} \frac{3t - t^3}{2t - t^2} = \infty$, es decir, no existen asíntotas.

2°. La curva no posee las propiedades de simetría y de periodicidad.

3°. Tenemos $x = 0$ siendo $t = 0$ y $t = 2$; $y = 0$ siendo $t = 0$, $t = -\sqrt{3}$ y $t = \sqrt{3}$.

4°. Hallamos $\dot{x}(t)=2(1-t)=0$ cuando $t=1$, $\dot{y}(t)=3(1-t^2)=$ $=0$ para $t=-1$ y $t=1$.

5°. Puesto pue $f''=\frac{3}{4(1-t)}$, resulta que $f''>0$ siendo $t<1$, $f''<0$ cuando $t>1$.

6°. Hacemos la tabla:

(t_p, t_{p+1})	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
(x_p, x_{p+1})	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, -\infty)$
(y_p, y_{p+1})	$(+\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, -\infty)$
Signo de f''	+	+	−

7°. Construimos la curva (fig. 14).

Es de advertir que si t lo consideramos como el tiempo, y asimismo la curva dada mediante el sistema de ecuaciones (2), como la trayectoria de movimiento de un punto en el plano (x, y), entonces $\{\dot{x}, \dot{y}\}$ será el vector velocidad con que se mueve este punto. Cuando $t=1$ en el ejemplo dado $\dot{x}(t)=$ $=\dot{y}(t)=0$, es decir, la velocidad es nula, con la particularidad de que al pasar por $t=1$, $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$ cambian de signo. Esto significa que cuando $t\to 1-0$ el punto, que se mueve por la trayectoria, se aproxima al punto $W(1, 2)$ (fig. 14), en el momento $t=1$ se detiene en el punto W y después se mueve en dirección contraria. Ya que $\lim \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim\limits_{t\to 1+0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$, las ramas de la trayectoria, que corresponden a $t\leqslant 1$ y $t\geqslant 1$, tienen para $t=1$, es decir, en el punto $W(1, 2)$, una misma tangente lateral. El punto $W(1, 2)$ se llama *punto de retroceso* (este nombre, evidentemente, corresponde a la interpretación física que acabamos de examinar). ▲

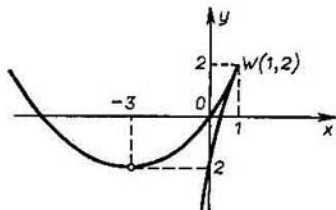


Fig. 14.

OBSERVACIÓN 1. Para la curva representada por la ecuación del tipo

$$F(x, y)=0, \tag{3}$$

a veces se logra obtener las ecuaciones paramétricas. De ordinario esto se hace así. Pongamos $y=\alpha(t)x^n$, donde $\alpha(t)$ y n son una función y un número elegidos de manera adecuada. Sustituyendo la

expresión para y en la ecuación (3), obtenemos $F(x, \alpha(t)\, x^n) = 0$. Sea $x = \varphi(t)$ la solución de esta ecuación. Entonces

$$x = \varphi(t), \quad y = \alpha(t)\, \varphi^n(t) \equiv \psi(t)$$

son las ecuaciones paramétricas de la curva. En la práctica la elección de la función $\alpha(t)$ queda determinada por el tipo de la función $F(x, y)$.

Examinemos la curva dada mediante la ecuación

$$x^4 + y^4 = 2xy. \tag{4}$$

A esta ecuación pueden satisfacer las coordenadas x, y sólo de aquellos puntos que se hallen en los cuadrantes I y III o en los ejes de coordenadas, es decir, ha de cumplirse la desigualdad $xy \geqslant 0$. Para pasar a las ecuaciones paramétricas de la curva hagamos $y = x\sqrt{\operatorname{tg} t}$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (4), obtenemos

$$x^4 (1 + \operatorname{tg}^2 t) = 2x^2 \sqrt{\operatorname{tg} t},$$

de donde $x = 0$ y $x = \sqrt[4]{4 \operatorname{tg} t}\cos t$. La primera solución $x = 0$ viene contenida en la segunda cuando $t = 0$. De esta manera las ecuaciones paramétricas de la curva tienen la forma de

$$x = \sqrt[4]{4 \operatorname{tg} t}\cos t, \quad y = \sqrt[4]{4 (\operatorname{tg} t)^3}\cos \mathrm{t}.$$

Sin embargo, el parámetro t puede introducirse también de otra manera, por ejemplo, haciendo $y = xt$. Entonces llegamos a las siguientes ecuaciones paramétricas de la curva:

$$x = \sqrt{\frac{2t}{2+t^4}}, \quad y = \sqrt{\frac{2t^3}{1+t^4}}$$

y

$$x = -\sqrt{\frac{2t}{1+t^4}}, \quad y = -\sqrt{\frac{2t^3}{1+t^4}}.$$

La ulterior investigación de la curva llévela a cabo por su propia cuenta para ambos casos de introducción del parámetro t.

OBSERVACIÓN 2. La curva dada en coordenadas polares puede investigarse, utilizando el esquema expuesto en este párrafo. En efecto, sea una curva dada en el sistema polar de coordenadas (φ, ρ) mediante la ecuación $\rho = f(\varphi)$. Entonces, expresando las coordenadas cartesianas a través de las polares:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi, \end{cases}$$

obtenemos las ecuaciones paramétricas de la curva (φ es el parámetro):

$$x = f(\varphi)\cos \varphi, \quad y = f(\varphi) \operatorname{sen} \varphi.$$

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

Constrúyanse las curvas dadas mediante las ecuaciones:

27. $x=\frac{1}{4}(t+1)^2,\ y=\frac{1}{4}(t-1)^2$.

28. $x=\frac{t^2}{1-t^2},\ y=\frac{1}{1+t^2}$. 29. $x=\frac{t^2}{t-1},\ y=\frac{t}{t^2-1}$.

30. $x=-5t^2+2t^5,\ y=-3t^2+2t^3$.

31. $x=\frac{t^2+1}{4(1-t)},\ y=\frac{t}{t+1}$. 32. $x=\frac{(t+2)^2}{t+1},\ y=\frac{(t-2)^2}{t-1}$.

33. $x=\frac{t-t^3}{1+t^2},\quad y=\frac{t^2-t^3}{1+t^2}$.

Pasando a las ecuaciones paramétricas, constrúyanse las curvas dadas mediante las ecuaciones siguientes:

34. $x^3+y^3=3axy$, donde $a>0$ (folio de Descartes).

35. $(x-a)^2(x^2+y^2)=b^2x^2$, donde $a>0$, $b>0$ (concoide de Nicomedes). Examínense los casos: a) $a>b$, b) $a=b$; c) $a<b$; determínese en cada uno de éstos, cuál es el carácter del punto singular de la curva $O(0, 0)$.

36. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, donde $a>0$ (astroide).

37. $x^6+2x^3y=y^3$. ● Hágase $y=x^2t$.

38. $4y^2=4x^2y+x^5$. ● Hágase $y=x^2t$.

39. $x^4+2y^3=4x^2y$. 40. $x^3-2x^2y-y^2=0$.

41. $x^2y^2+y=1$. ● Hágase $y=t/x$.

42. $x^3+y^3=3x^2$. 43. $y^5+x^4=xy^2$.

44. $x^4-y^4+xy=0$. 45. $x^5+y^5=xy^2$.

Constrúyanse las curvas dadas en el sistema polar de coordenadas mediante las ecuaciones:

46. $\rho=5/\varphi(0<\varphi<+\infty)$. 47. $\rho^2=2a^2\cos^2\varphi$.

48. $\rho=a\cos\varphi+b$. 49. $\rho=a \operatorname{sen} 3\varphi\ (a>0)$. 50. $\rho=2/\sqrt{\cos 3\varphi}$.

Capítulo VIII
Integral definida

§ 1. Integrabilidad de la función (según Riemann) e integral definida

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Sumas integrales y la integral definida. Sea una función $f(x)$ definida en un segmento $[a, b]$ (donde $a<b$). Designemos la división arbitraria del segmento $[a, b]$ por los puntos $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ en n segmentos elementales $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$

con el símbolo $T[a, b]$ o simplemente T. Hagamos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Elijamos en cada segmento $[x_{i-1}, x_i]$ un punto arbitrario ξ_i y anotemos la suma:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = I(x_i, \xi_i).$$

El número $I(x_i, \xi_i)$ se llama *suma integral* de la función $f(x)$, que corresponde a la división dada $T[a, b]$ y a la elección dada de los puntos arbitrarios ξ_i en los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$. Introduzcamos la designación $\Delta = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i$.

DEFINICIÓN. *El número I se llama* ***límite de las sumas integrales*** *$I(x_i, \xi_i)$ cuando $\Delta \to 0$, si $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que para toda división $T[a, b]$, en la cual $\Delta < \delta$, se cumple la desigualdad $|I(x_i, \xi_i) - I| < \varepsilon$ para cualquier elección de los puntos intermedios ξ_i en $[x_{i-1}, x_i]$.*

DEFINICIÓN. *Una función $f(x)$ se llama* ***integrable (según Riemann)*** *en el segmento $[a, b]$, si existe $\lim\limits_{\Delta\to 0} I(x_i, \xi_i) = I$.*

Además, el número I se llama *integral definida* de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y se designa así:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Sumas de Darboux. Sea $f(x)$ definida y acotada en $[a, b]$. Para una división arbitraria $T[a, b]$ introduzcamos las designaciones $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$ y anotemos las sumas;

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Los números s y S se llaman *sumas inferior y superior* (*sumas de Darboux*) que corresponden a la división dada $T[a, b]$.

Es evidente que para la división fijada $T[a, b]$ y toda elección de los puntos intermedios en esta división $s \leqslant I(x_i, \xi_i) \leqslant S$.

Aduzcamos las propiedades de las sumas de Darboux.

1ª. Para toda división fijada

$$s = \inf_{\substack{\text{por todos los}\\ \text{conjuntos de}\\ \text{los puntos } \xi_i}} \{I(x_i, \xi_i)\}, \quad S = \sup_{\substack{\text{por todos los}\\ \text{conjuntos de}\\ \text{los puntos } \xi_i}} \{I(x_i, \xi_i)\}.$$

2ª. Si la división T_2 se ha obtenido de la división T_1, agregando unos cuantos puntos nuevos (es decir, se ha obtenido mediante la subdivisión de T_1), entonces la suma inferior s_2 de T_2 no es menor que la suma inferior s_1 de T_1, en tanto que la suma superior S_2 de T_2 no es mayor que la suma superior S_1 de T_1: $s_1 \leqslant s_2$, $S_2 \leqslant S_1$.

3ª. La suma inferior de una división arbitraria no supera la suma superior de otra división cualquiera.

4°. Sean $\{s\}$ y $\{S\}$ los conjuntos de las sumas inferiores y superiores de todo género posible para las divisiones cualesquiera $[a, b]$. Los números

$$\overline{I} = \inf_{\substack{\text{por todas las}\\ \text{divisiones}}} \{S\}, \quad \underline{I} = \sup_{\substack{\text{por todas las}\\ \text{divisiones}}} \{s\}$$

se llaman *integrales superior e inferior de Darboux*, respectivamente.

La integral inferior de Darboux no puede exceder de la superior: $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

5ª. LEMA DE DARBOUX:

$$\lim_{\Delta \to 0} S = \overline{I}, \quad \lim_{\Delta \to 0} s = \underline{I}.$$

3. Condiciones necesarias y suficientes de la integrabilidad.

Teorema 1. *Para que una función $f(x)$ acotada en un segmento $[a, b]$ sea integrable en este segmento, es necesario y suficiente, que $\underline{I} = \overline{I}$.*

Teorema 2. *Para que una función acotada en un segmento $[a, b]$ sea integrable en este segmento, es necesario y suficiente que $\forall \varepsilon > 0$ se halle tal división T $[a, b]$ (¡aunque sólo sea una!), para la cual*

$$S - s < \varepsilon. \tag{1}$$

Recordemos que el número $\omega_i = M_i - m_i$ se llama oscilación de la función en el segmento $[x_{i-1}, x_i]$.

La condición (1) puede escribirse en la siguiente forma

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

4. Algunas clases de las funciones integrables.

Teorema 3. *Una función $f(x)$ continua en un segmento $[a, b]$ es integrable en este segmento.*

COROLARIO. *Cualquier función elemental es integrable en todo segmento que se halla por completo en el campo de definición de aquélla (puesto que ella es continua en este segmento).*

Teorema 4. *Sea $f(x)$ acotada en el segmento $[a, b]$. Si $\forall \varepsilon > 0$ existe un número finito de intervalos que cubren todos los puntos de discontinuidad de $f(x)$ y tienen la suma de longitudes menor que ε, entonces $f(x)$ es integrable en el segmento $[a, b]$.*

COROLARIO. *Una función continua a trozos (o sea, que tiene en el segmento $[a, b]$ un número finito de puntos de discontinuidad de I especie) es integrable en este segmento.*

OBSERVACIÓN. Si se cumplen las condiciones del teorema 4, resulta que el valor de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ no depende de los valores de $f(x)$ en los puntos de discontinuidad. Por eso con frecuencia se plantea y se resuelve el problema para calcular la integral de una función, que no está definida ya sea en un número finito de puntos del segmento $[a, b]$, o bien en un conjunto de puntos, el cual puede

cubrirse con un número finito de intervalos de longitud tan pequeña como se quiera. En este caso se considera que la función $f(x)$ está definida en estos puntos de manera arbitraria, pero sigue permaneciendo, por supuesto, acotada en el segmento $[a, b]$ y, por consiguiente, es integrable.

Por ejemplo, hablando estrictamente, la integral

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \qquad (2)$$

no existe, puesto que en el punto $x=0$ la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ no está definida. Sin embargo, la integral $\int_0^1 f(x)\, dx$, donde $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{cuando } x \neq 0, \\ C & \text{cuando } x = 0 \end{cases}$ (C es un número arbitrario), existe y no depende de la elección de C. Por eso se considera que la integral (2) también existe y es igual a $\int_0^1 f(x)\, dx$.

Teorema 5. *Una función $f(x)$ monótona en un segmento $[a, b]$ es integrable en este segmento.*

II. Preguntas y tareas de control

1. ¿Qué significa división del segmento $[a, b]$?
2. ¿Qué es suma integral de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$?
3. Dése la definición del límite de las sumas integrales al subdividir las divisiones ($\Delta \to 0$) del segmento $[a, b]$.
4. ¿Qué es una integral definida?
5. ¿Qué función se llama integrable?
6. Demuéstrese que una función no acotada no es integrable.
7. ¿Será integrable la función $f(x) = 1/x$ en el segmento $[1, 2]$, o bien en el segmento $[-1, 1]$?
8. ¿Será integrable la función $f(x) = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$ en el segmento $[\pi/6, \pi/4]$, o en el segmento $[-1, 1]$?
9. ¿Será integrable la función $f(x) = e^{-1/x}$ en los segmentos $[-3, -2]$, $[-1, 0]$ y $[-1, 1]$?
10. ¿Acaso es integrable toda función acotada? Arguméntese la respuesta, citando ejemplos.
11. ¿A qué se llaman sumas inferior y superior (sumas de Darboux)?
12. Enumérense las propiedades de las sumas de Darboux.
13. Enúnciense las condiciones necesarias y suficientes de la integrabilidad (dos variantes).
14. Cite las clases de las funciones integrables que conoce. Aduzca ejemplos de funciones de estas clases.

15. Idéese un ejemplo de una función monótona en el segmento $[a, b]$, que tenga una cantidad infinitamente grande de puntos de discontinuidad. ¿Será integrable semejante función en $[a, b]$?

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Una función constante $f(x) = C$ es integrable en $[a, b]$, puesto que las sumas integrales tienen un mismo valor para todas divisiones posibles y para cualquier elección de los puntos ξ_i:

$$I(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta\xi_i = C\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = C(b-a).$$

De aquí $\int_a^b C\, dx = \lim_{\Delta\to 0} I(x_i, \xi_i) = C(b-a)$.

2. Demostrar que la función de Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es irracional;} \\ 1, & \text{si } x \text{ es racional,} \end{cases}$$

no es integrable en un segmento $[a, b]$ cualquiera.

△ En efecto, en cualquier segmento tan pequeño como se quiera $[x_{i-1}, x_i]$ se encontrarán tanto un punto racional, como un irracional. Si en todos los segmentos se eligen los racionales ξ_i, resulta que $I(x_i, \xi_i) = b - a$; pero si se eligen todos los ξ_i irracionales, entonces $I(x_i, \xi_i) = 0$. Alternando estas elecciones para $\Delta \to 0$, obtenemos que el límite I no existe. Esto significa que la función de Dirichlet no es integrable. ▲

3. Comprobar que para la función $f(x) = 1 + x$ en el segmento $[-1, 4]$ está cumplida la condición (1) del teorema 2, y calcular $I = \int_{-1}^{4} (1 + x)\, dx$ como límite de las sumas integrales.

△ Según el teorema 2 para un $\varepsilon > 0$ arbitrario hay que elegir tal división del segmento $[-1, 4]$, para la cual $S - s < \varepsilon$.

Dividamos el segmento $[-1, 4]$ en n partes iguales. En cada segmento $[x_{i-1}, x_i] = \left[-1 + \frac{5(i-1)}{n}, -1 + \frac{5i}{n}\right]$ la función continua $1 + x$ alcanza la cota inferior exacta en el extremo izquierdo del segmento y la superior exacta, en el derecho. Por eso

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(-1 + \frac{5(i-1)}{n}\right) \cdot \frac{5}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{5}{n}(i-1)\frac{5}{n} = \frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1),$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(-1 + \frac{5i}{n}\right) \cdot \frac{5}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{5}{n} \cdot i \cdot \frac{5}{n} = \frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i.$$

De aquí

$$S-s=\frac{25}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i-\sum_{i=1}^{n}(i-1)\right)=\frac{25}{n^2}n=\frac{25}{n}<\varepsilon,$$

si $n>25/\varepsilon$, es decir, para tal número n de puntos de división del segmento $[-1, 4]$ está cumplida la desigualdad (1). Esto significa que según el teorema 2 la integral $I=\int_{-1}^{4}(1+x)\,dx$ existe.

Para calcularla como límite de las sumas integrales, se puede examinar cualquier sucesión de las sumas integrales, en la cual $\Delta\to 0$, puesto que de la existencia de la integral se infiere que el límite de cualquier sucesión de las sumas integrales al subdividir la división existe y es igual a I.

Tomemos, por ejemplo, la sucesión de las sumas integrales que corresponde a las divisiones del segmento $[-1, 4]$ en n partes iguales ($i=1, 2, \ldots$) y a la elección como puntos ξ_i de los extremos derechos de los segmentos elementales. En este caso para la función creciente $f(x)=1+x$ la suma integral es igual a la suma superior $S=\sum_{i=1}^{n}\frac{25}{n^2}i$, de donde se obtiene

$$I=\int_{-1}^{4}(1+x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{25}{n^2}i=\lim_{n\to\infty}\frac{25n(n+1)}{2n^2}=\frac{25}{2}.$$

Así, pues, $\int_{-1}^{4}(1+x)\,dx=25/2$. ▲

4. Demostrar que la función de Riemann

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x \text{ es irracional;}\\ 1/n, & \text{si } x=m/n,\end{cases}$$

donde m y n ($n\geqslant 1$) son enteros primos entre sí, es integrable en cualquier segmento $[a, b]$.

△ De nuevo recurramos al teorema 2. Prefijemos un $\varepsilon>0$ arbitrario. Entonces la función $\varphi(x)$ satisface las desigualdades

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)}<\varphi(x)<1$$

sólo en cierto número finito N de puntos.

Esto se desprende de las siguientes consideraciones. Todos los puntos racionales del segmento $[a, b]$, es decir, los puntos del tipo m/n pueden numerarse en el siguiente orden: primero los puntos del tipo $m/1$, luego $m/2$, después $m/3$, etc. Los valores correspondientes de la función $\varphi(x)$ en estos puntos son iguales a $1/1$, $1/2$, $1/3$, ..., es decir, disminuyen al pasar a cada grupo siguiente de puntos, además la cantidad de puntos de cada tipo es finita. De esta manera

entre el número de los N puntos indicados figurarán tales, para los cuales

$$\frac{1}{n} > \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \text{de donde } n < \frac{2(b-a)}{\varepsilon}.$$

Está claro que hay un número finito de semejantes puntos (supongamos que es igual a N).

Cubramos estos N puntos con un sistema finito de segmentos disjuntos dos a dos, con la suma total de longitudes inferior a $\varepsilon/2$. Designemos las longitudes de estos segmentos con $\Delta x_i'$. Se ha obtenido cierta división de $[a, b]$. En los segmentos con longitudes $\Delta x_i'$ las oscilaciones ω_i' de la función $\varphi(x)$ no sobrepasan a 1, puesto que $\forall x \in [a, b]\ 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$. Existe también cierta cantidad finita de otros segmentos (designemos sus longitudes con $\Delta x_i''$). Las oscilaciones ω_i'' de la función $\varphi(x)$ en estos segmentos no sobrepasan a $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Por eso para la división obtenida son válidas las estimaciones

$$S-s=\sum \omega_i \Delta x_i = \sum \omega_i' \Delta x_i' + \sum \omega_i'' \Delta x_i'' <$$

$$< 1\cdot \sum \Delta x_i' + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum \Delta x_i'' < 1\cdot\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon.$$

Así, pues, según el $\varepsilon > 0$ prefijado se ha encontrado la división del segmento $[a, b]$ para la cual $S - s < \varepsilon$; por consiguiente, ateniéndose al teorema 2 la función de Riemann $\varphi(x)$ es integrable en cualquier segmento de $[a, b]$. ▲

5. Calcular $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)}$.

△ Esta integral pertenece al tipo de las integrales que fueron examinadas en la observación al teorema 4, puesto que :

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)} = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leqslant x < \pi/2,\ \pi/2 < x \leqslant \pi, \\ \text{no está definida para } x = \pi/2. \end{cases}$$

Al definir adicionalmente esta función en el punto $\pi/2$, por ejemplo, en lo referente a la continuidad, es decir, haciendo $f(\pi/2) = 1$, obtenemos $f(x) \equiv 1\ \forall x \in [0, \pi]$, y, por consiguiente, la integral buscada es igual a π. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

1. Para las funciones dadas en los segmentos indicados hállense las sumas de Darboux superior S e inferior s, al dividir los segmentos en n partes iguales: a) $f(x) = x^3$, $2 \leqslant x \leqslant 3$; b) $f(x) = 2^x$, $0 \leqslant x \leqslant 10$.

2. Calcúlense las integrales definidas como límites de las sumas integrales:

a) $\int_{-1}^{2} x^2\,dx$ (resulta cómodo dividir el segmento $[-1, 2]$ en partes iguales);

b) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2}$ (lo conveniente es elegir $\xi_i = \sqrt{x_i \cdot x_{i+1}}$);

c) $\int_{2}^{3} x^m\,dx$ (conviene elegir los puntos de división x_i de tal manera que formen una progresión geométrica).

3. Demuéstrese que función $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$ es integrable en el segmento $[0, 1]$.

4. Demuéstrese que la función $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\right)$ es integrable en el segmento $[0, 1]$.

§ 2. Propiedades de la integral definida

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Propiedades de la integral definida.

1ª. Según la definición, $\int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

2ª. Según la definición, $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = -\int_{b}^{a} f(x)\,dx$.

3ª. LINEALIDAD DE LA INTEGRAL. Si $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en $[a, b]$, en tanto que α y β, cualesquiera números reales, entonces la función $\alpha f(x) + \beta g(x)$ también será integrable en $[a, b]$, además

$$\int_{a}^{b} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \beta \int_{a}^{b} g(x)\,dx.$$

4ª. Si $f(x)$ es integrable en $[a, b]$, tendremos que la función $|f(x)|$ también será integrable en $[a, b]$, con la particularidad de que

$$\left|\int_{a}^{b} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{a}^{b} |f(x)|\,dx \quad (a < b).$$

5ª. Si $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en $[a, b]$, resulta que la función $f(x)\,g(x)$ también será integrable en $[a, b]$.

6ª. Si $f(x)$ es integrable en $[a, b]$, entonces es integrable también en cualquier segmento $[c, d] \subset [a, b]$.

7ª. ADITIVIDAD DE LA INTEGRAL. Si $f(x)$ es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$, será integrable también en $[a, b]$, además

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En este caso el punto c puede estar situado arbitrariamente respecto de a y b.

En las propiedades 8ª — 10ª que se exponen a continuación supondremos que $a < b$.

8ª. Si $f(x)$ es integrable en $[a, b]$ y $f(x) \geqslant 0$, tendremos que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

9ª. Si $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \geqslant g(x)\ \forall x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

10ª. Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, $f(x) \geqslant 0$, $f(x) \not\equiv 0$ en $[a, b]$, resulta que $\exists K > 0$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant K$.

2. Fórmulas del valor medio.

Teorema 6. *Sean* $f(x)$ *y* $g(x)$ *integrables en* $[a, b]$; $g(x) \geqslant 0$ $(g(x) \leqslant 0)$ $\forall x \in [a, b]$, $M = \sup\limits_{[a, b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{[a, b]} f(x)$. *Entonces existe un número* $\mu \in [m, M]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{1}$$

COROLARIO 1. *Si en la fórmula* (1) *adoptamos* $g(x) = 1$, *tendremos*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a), \text{ donde } \mu \in [m, M]. \tag{2}$$

El número $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ se llama *valor medio de la función* $f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

COROLARIO 2. *Si se cumplen las condiciones del teorema* 6 *y la función* $f(x)$ *es continua, quiere decir que* $\exists \xi \in [a, b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx. \tag{3}$$

COROLARIO 3. *Si* $f(x)$ *es continua en* $[a, b]$, *resulta que* $\exists \xi \in \in [a, b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \qquad (4)$$

II. Preguntas y tareas de control

1. Enumérense las propiedades de la integral definida.
2. ¿De la integrabilidad de la suma se podrá deducir que los sumandos son integrables? Arguméntese la respuesta, dando ejemplos.
3. Examínense los problemas análogos para la diferencia, el producto y el cociente de dos funciones.
4. ¿Será integrable la suma de dos funciones, si uno de los sumandos es integrable y el otro no lo es?
5. Examínense los problemas análogos para la diferencia, el producto y el cociente de dos funciones.
6. ¿Será integrable la suma de dos funciones no integrables? Arguméntese la respuesta, exponiendo ejemplos.
7. Examínense los problemas análogos para la diferencia, el producto y el cociente de dos funciones no integrables.
8. Se conoce que $|f(x)|$ es una función integrable. ¿Qué se puede decir acerca de la integrabilidad de $f(x)$? Adúzcanse ejemplos.
9. Sea $f(x)$ integrable en $[a, c]$ y no integrable en $[c, b]$. ¿Qué se puede decir acerca de su integrabilidad en $[a, b]$?
10. Se conoce que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$. ¿Se deduce de aquí que $f(x) \geqslant \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b]$? Adúzcanse ejemplos.
11. Se conoce que $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$. ¿Se infiere de aquí que $f(x) \geqslant g(x)$ $\forall x \in [a, b]$? Expónganse ejemplos.
12. Adúzcanse unas cuantas variantes de la fórmula del valor medio. ¿Para qué condiciones son válidas?

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Demostrar que la suma, el producto y el cociente de dos funciones no integrables pueden ser integrables.

$\triangle$ Sea $f(x) = 2 + D(x)$, $g(x) = 2 + D(x)$, donde

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es un número irracional;} \\ 1, & \text{si } x \text{ es un número racional} \end{cases}$$

(es decir, $D(x)$ es la función de Dirichlet).

Recordemos que la función $D(x)$ no es integrable (véase el ejemplo 2 del § 1). La función $f(x) = 2 + D(x)$ tampoco será integrable.

En efecto, si se admite que $f(x)$ es integrable, resulta que la diferencia de dos funciones integrables $f(x) - 2 = D(x)$ en correspondencia a la 3ª propiedad ha de ser integrable, pero esto contradice a que $D(x)$ no es integrable. Puesto que $g(x) = f(x)$, tendremos que $g(x)$ no es integrable. Examinemos la función

$$h(x) = \frac{1}{g(x)} = \begin{cases} 1/2, & \text{si } x \text{ es un número irraccional;} \\ 1/3, & \text{si } x \text{ es un número racional.} \end{cases}$$

Esta función tampoco es integrable. La demostración es análoga a la expuesta al demostrar la no integrabilidad de la función de Dirichlet.

Anotemos la suma, el producto y el cociente de las funciones no integrables:

$$F_1(x) = f(x) + (-g(x)) \equiv 0, \quad F_2(x) = f(x)\,h(x) \equiv 1,$$
$$F_3(x) = f(x)/g(x) \equiv 1.$$

Las funciones F_1, F_2, F_3, siendo constantes, son integrables en cualquier segmento $[a, b]$. De esta manera, de la integrabilidad de la suma o del producto no se infiere la integrabilidad de los sumandos o factores. ▲

2. Demostrar que el producto de una función integrable $f(x)$ por una función no integrable $g(x)$ puede ser: a) una función integrable; b) una función no integrable.

△ a) Examinemos, por ejemplo, la función integrable $f(x) \equiv 0$ y la función no integrable de Dirichlet $D(x)$ en $[a, b]$. Puesto que $f(x)\,D(x) \equiv 0$, quiere decir que $f(x)\,D(x)$ es una función integrable en $[a, b]$.

b) Sea $f(x) \equiv 2$, $g(x) = D(x)$ en $[a, b]$. Entonces $f(x)\,g(x) = 2D(x)$ es una función no integrable en $[a, b]$. ▲

3. Hallar el valor medio de una función en un segmento prefijado: a) $f(x) = \cos x$ en $[0, 3\pi/2]$; b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ en $[-1, 2]$.

△ Hallemos los valores medios μ, utilizando la fórmula (2):

a) $\mu = \frac{2}{3\pi} \int\limits_0^{3\pi/2} \cos x\, dx = -\frac{2}{3\pi}$. Señalemos que la función $\cos x$ toma en el segmento $[0, 3\pi/2]$ el valor de $\mu = -2/(3\pi)$, a saber, $\cos\xi = -2/(3\pi)$, en el punto $\xi = \arccos\left(-\frac{2}{3\pi}\right) \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

b) $\mu = \frac{1}{3} \int\limits_{-1}^{2} \operatorname{sgn} x\, dx = \frac{1}{3}$. En el caso dado la función discontinua $\operatorname{sgn} x$ no toma en el segmento $[-1, 3]$ el valor de $\mu = 1/3$. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

5. Demuéstrese que la suma de una función integrable y de una función no integrable es una función no integrable.

6. ¿Son integrables en el segmento $[0, 1]$ las funciones:
a) $f_1(x) = x$; b) $g_1(x) = 1/x$; c) $f_1(x) + g_1(x)$;
d) $f_1(x)\, g_1(x)$; e) $f_2(x) = \sqrt{x}$; f) $f_2(x)\, g_1(x)$?

7. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ D(x) & \text{cuando } 0 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

donde $D(x)$ es la función de Dirichlet. ¿Será integrable la función $f(x)$ en los segmentos $[-2, 2]$, $[-2, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 2]$?

8. Supongamos que existe $\int\limits_a^b |f(x)|\, dx$. ¿Se deduce de aquí la integrabilidad de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$? Examínese el ejemplo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es un número racional;} \\ -1, & \text{si } x \text{ es un número irracional.} \end{cases}$$

9. Sean $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = 0{,}5 \operatorname{sen} x$ y supongamos que: a) $0 \leqslant x \leqslant \pi$; b) $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$. ¿En cuál de estos casos quedan cumplidas las condiciones de la 9ª propiedad?

10. Hállese el valor medio de la función en los segmentos indicados:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$, $[0, 2\pi]$, $[\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi]$, $[\varphi_0, \varphi_0 + \pi]$;
b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ en $[-2, -1]$, $[-2, 1]$, $[-1, 3]$, $[-2, 2]$, $[1, 2]$.

¿El valor medio de una función en cada segmento será uno de los valores de esta función en el segmento dado? Explíquese por qué en unos casos la respuesta es positiva y en otros, negativa.

11. Hállese el valor medio de la función en los siguientes segmentos:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ en $[0, 1]$, $[0, 10]$, $[0, 100]$;
b) $f(x) = 10 + 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$ en $[-\pi, \pi]$;
c) $f(x) = \operatorname{sen} \operatorname{sen} (x + \varphi)$ en $[0, 2\pi]$.

12. Hállese el valor medio de la velocidad de un cuerpo, que cae libremente de una altura h, cuya velocidad inicial era igual a v_0.

13. La intensidad de la corriente alterna varía según la ley

$$i = i_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right),$$

donde i_0 es la amplitud; t, el tiempo; T, el período; φ, la fase inicial. Hállese el valor medio del cuadrado de la intensidad de la corriente:

a) en el intervalo de tiempo $[0, T]$;
b) en el intervalo $[0, T/2]$ (período de la función $i^2(t)$);
c) en un intervalo arbitrario $[0, t_0]$ y el límite de este valor medio para $t_0 \to \infty$.

§3. Fórmula de Newton-Leibniz

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Primitiva de las funciones continuas y continuas a trozos. Sea una función $f(x)$ integrable en un segmento $[a, b]$. La función

$$F(x)=\int_{a}^{x} f(t)\,dt \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

se llama *integral con límite superior variable.*

Teorema 7. *Una función $f(x)$ continua en el segmento $[a, b]$ tiene primitiva en este último. Una de las primitivas es la función*

$$F(x)=\int_{a}^{x} f(t)\,dt. \tag{1}$$

OBSERVACIÓN. La integral con límite superior variable está definida para toda función $f(x)$ integrable en $[a, b]$. Sin embargo, para que una función $F(x)$ del tipo (1) resulte primitiva respecto de $f(x)$, tiene importancia sustancial que la función $f(x)$ sea continua.

Aduzcamos un ejemplo para mostrar que una función integrable puede no tener primitiva. Sea

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1 \text{ para } x>0 \\ 0 \text{ para } x=0, \\ -1 \text{ para } x<0; \end{cases} \quad x\in[-1, 1].$$

Esta función es integrable en el segmento $[-1, 1]$, puesto que es continua a trozos, pero como ya hemos indicado en el cap. V, no tiene primitiva. En efecto, cualquier función del tipo

$$F(x)=\begin{cases} -x+C_1 & \text{para } x<0 \\ x+C_2 & \text{para } x\geqslant 0, \end{cases}$$

donde C_1, C_2 son números arbitrarios, tiene derivada igual a $\operatorname{sgn} x$, para todos $x\neq 0$. Pero incluso «la más buena» de estas funciones, que es continua, $F(x)=|x|+C$ (si $C_1=C_2=C$), no tiene derivada, cuando $x=0$. Por eso la función $\operatorname{sgn} x$ (y, en general, toda función continua a trozos) no tiene primitiva en cada intervalo que contenga un punto de discontinuidad.

Demos ahora la definición amplia de la primitiva que sea útil también para las funciones continuas a trozos.

DEFINICIÓN. *Una función $F(x)$ se llama **primitiva** de la función $f(x)$ en el segmento* $[a, b]$, si: 1°) $F(x)$ es continua en $[a, b]$; 2°) $F'(x)=f(x)$ en los puntos de continuidad de $f(x)$.

OBSERVACIÓN. Una función $f(x)$ continua en $[a, b]$ es el caso particular de la continua a trozos («el trozo de su continuidad» coincide con todo el segmento $[a, b]$). Por eso para la función continua

la definición ampliada de la primitiva coincide con la anterior, puesto que $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$ y la continuidad de $F(x)$ se infiere de su diferenciabilidad.

Aduzcamos un ejemplo de una función que tiene primitiva en el sentido «nuevo» y que no la tiene en el «viejo». La función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ en $[-1, 1]$ en el sentido «viejo» no tenía primitiva. En el sentido «nuevo» como su primitiva interviene la función $F(x) = |x|$, puesto que es continua en $[-1, 1]$ y $F'(x) = f(x)$ para $x \neq 0$, es decir, en todos los puntos, a excepción del punto de discontinuidad $x = 0$.

La importancia de la definición ampliada de la primitiva queda clara del resultado siguiente, que conserva el teorema 7 para las funciones continuas a trozos, asociándolo a la definición «nueva» de primitiva.

Teorema 8. *Una función $f(x)$ continua a trozos en el segmento $[a, b]$ tiene primitiva en este segmento en el sentido de la definición ampliada. Una de las primitivas es la función* $F(x) = \int_a^n f(t)\,dt$.

2. Fórmula de Newton—Leibniz

Teorema 9. *Para las funciones continuas a trozos es válida la fórmula de Newton — Leibniz (regla de Barrow):*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

donde $F(x)$ es la primitiva de la función $f(x)$ en $[a, b]$ en el sentido de la definición ampliada.

Por ejemplo, $\int_{-1}^{2} \operatorname{sgn} x\,dx = |x| \Big|_{-1}^{2} = 2 - 1 = 1.$

3. Método de sustitución de la variable.

Teorema 10. *Supongamos que:*

1°) *$f(x)$ está definida y es continua en $[a, b]$;*

2°) *$x = g(t)$ está definida y es continua junto con la derivada en $[\alpha, \beta]$ donde $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ y $a \leqslant g(t) \leqslant b$.*

Entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt.$

4. Método de integración por partes

Teorema 11. *Si $f(x)$ y $g(x)$ tienen derivadas continuas en $[a, b]$, tendremos que*

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx.$$

II. Preguntas y tareas de control

1. ¿Qué se llama integral con límite superior variable? ¿Para qué funciones integrando dicha integral sirve de primitiva?
2. Dése la definición ampliada de una primitiva que sea útil para las funciones continuas a trozos.
3. ¿Para qué condiciones es válida la fórmula de Newton — Leibniz?
4. Se conoce que la función $f(x)$ tiene primitiva en $[a, b]$. ¿Será integrable $f(x)$ en $[a, b]$? Examínese el ejemplo: $f(x) = F'(x)$, donde

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) \text{ para } x \neq 0, \\ 0 \text{ para } x = 0; \quad x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

5. Enumérense las condiciones, al cumplir las cuales, son válidas: a) la fórmula de sustitución de la variable; b) la fórmula de integración por partes.
6. ¿Con ayuda de qué sustituciones se calculan las integrales que contienen: a) las irracionalidades lineales fraccionarias; b) las irracionalidades cuadráticas?
7. ¿Para calcular qué tipos de integrales son cómodas las sustituciones trigonométricas? Adúzcanse ejemplos.
8. ¿Para calcular qué tipos de integrales resulta cómodo el método de integración por partes? Expónganse ejemplos.

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \cos(t^2)\, dt}{x}$.

△ El límite dado es una expresión indeterminada del tipo 0/0. La integral con límite superior variable $\int_0^x \cos(t^2)\, dt$ es la primitiva de la función continua $\cos x^2$, es decir, $\left(\int_0^x \cos(t^2)\, dt\right)' = \cos(x^2)$. Por eso, empleando la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2)\, dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)}{1} = 1.$$

Señalemos que la primitiva para $\cos(x^2)$ no es una función elemental, es decir, $\int_0^x \cos(t^2)\, dt$ no se expresa a través de las fun-

ciones elementales. Sin embargo, esto no impidió que pudiésemos calcular el límite incógnito. ▲

2. Hallar la primitiva de la función continua a trozos

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ para } & |x|<1,\\ 0 \text{ para } & |x|\geqslant 1;\end{cases}\quad x\in\mathbf{R}.$$

△ Una de las primitivas es la integral con límite superior variable, además como límite inferior de integración puede tomarse cualquier número, por ejemplo, $x=-2$. Así, pues,

$$F(x)=\int_{-2}^{x} f(t)\,dt=\begin{cases}0 & \text{para } x\leqslant -1,\\ x+1 & \text{para } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 2 & \text{para } x\geqslant 1\end{cases}\quad \text{(fig. 15).}\ ▲$$

3. Calcular $I=\int_{0}^{\pi}\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}$.

△ I PROCEDIMIENTO. La función integrando de $f(x)$ no está definida en el punto $x=\pi/2$. Dividamos el segmento $[0,\pi]$ en dos: $[0,\pi/2]$ y $[\pi/2,\pi]$. Poniendo en el primer segmento $f(\pi/2)=1$, obtenemos la integral de la función continua $f\equiv 1$:

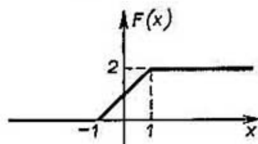


Fig. 15.

$$I_2=\int_{0}^{\pi/2} 1\,dx=x\Big|_{0}^{\pi/2}=\pi/2.$$

En el segundo segmento hagamos $f(\pi/2)=-1$ y de nuevo obtenemos la integral de la función continua $f\equiv -1$:

$$I_2=\int_{\pi/2}^{\pi}(-1)\,dx=-x\Big|_{\pi/1}^{\pi}=-\pi/2.$$

Definitivamente tenemos $I_1+I_2=0$.

II PROCEDIMIENTO. Utilicemos la definición ampliada de la primitiva. La función $F(x)$, que satisface esta definición, tiene la forma de

$$F(x)=\begin{cases}x & \text{para } 0\leqslant x\leqslant \pi/2,\\ \pi-x & \text{para } \pi/2\leqslant x\leqslant \pi.\end{cases}$$

En efecto, $F(x)$ es continua en $[0,\pi]$ y $F'(x)=f(x)\ \forall x\in[0,\pi]$, $x\neq\pi/2$, es decir, $F'(x)=f(x)$ en los puntos de discontinuidad de $f(x)$. (Recordemos que $x=\pi/2$ es el punto de discontinuidad de $f(x)$).

Según la fórmula de Newton — Leibniz, que es válida para las funciones continuas a trozos, y la definición ampliada de la primi-

tiva, obtenemos

$$I=\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_0^{\pi}=\pi-x\,|_{x=\pi}-x\,|_{x=0}=0. \quad ▲$$

Los dos ejemplos siguientes muestran que la utilización formal de la fórmula de Newton — Leibniz (es decir, el empleo de esta fórmula sin tomar en consideración las condiciones de su aplicación) puede conducir a un resultado incorrecto.

4. Examinemos la integral $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$. Adoptando como primitiva de la función integrando $f(x)=1/(2\sqrt{x})$ la función $F(x)=\sqrt{x}$ y empleando formalmente la fórmula de Newton-Leibniz, obtenemos

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}\,\Big|_0^1=1.$$

Sin embargo, este resultado es incorrecto, ya que la función $f(x)=$ $=1/(2\sqrt{x})$ no está acotada en $[0, 1]$ y, por consiguiente, la integral $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$ no existe.

5. Examinemos la integral.

$$I=\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

A primera vista puede parecer que la función $\operatorname{arctg}(1/x)$ es primitiva de la función integrando $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)$ y entonces, según la fórmula de Newton—Leibniz, obtenemos

$$I=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

No obstante, este resultado es incorrecto, puesto que la función $\operatorname{arctg}(1/x)$ no es primitiva para $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)$ en el segmento $[-1, 1]$. En realidad, en la fig. 16, *a* viene representada la gráfica de la función $\operatorname{arctg}(1/x)$. Con toda evidencia se ve que esta función tiene en el punto $x=0$ una discontinuidad de I especie, mientras que la primitiva según la propia definición ha de ser continua en todos los puntos.

Para calcular la integral I, advirtamos que la función integrando

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}-\dfrac{1}{1+x^2} & \text{para } x\neq 0,\\ \text{no está definida para } x=0.\end{cases}$$

Al determinar adicionalmente la continuidad de esta función en el punto $x = 0$, obtenemos la función continua

$$f(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Como primitiva para $f(x)$ sirve $F(x) = -\operatorname{arctg} x$, por eso según la fórmula de Newton — Leibniz tenemos

$$I = -\operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Señalemos que la primitiva para $f(x)$ se puede construir también con

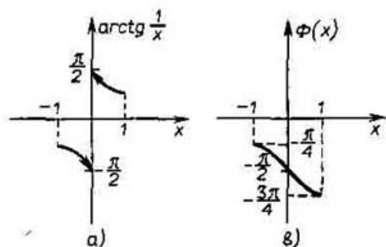


Fig. 16.

ayuda de la función arctg $(1/x)$, a saber:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(1/x) & \text{para } -1 \leqslant x < 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{para } x = 0, \\ \operatorname{arcrg}(1/x) - \pi & \text{para } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

La gráfica de $\Phi(x)$ está representada en la fig. 16, *b*. Según la fórmula de Newton — Leibniz de nuevo obtenemos

$$I = \Phi(x) \Big|_{-1}^{1} = -\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

6. Empleando la sustitución adecuada de la variable, calcular

$$I = \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

△ Hagamos $x = a \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Esta sustitución de la variable satisface todas las condiciones del teorema 4. Puesto que

$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$, $dx = a \cos t \, dt$, tendremos que

$$I = a^4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t \, dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2t \, dt =$$

$$= \frac{a^4}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) \, dt = \frac{a^4}{8} \left(t - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4t \right) \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}. \quad \blacktriangle$$

El ejemplo siguiente muestra que el empleo formal de la fórmula de sustitución de la variable (sin tomar en consideración las condiciones de su aplicación) puede dar un resultado incorrecto.

7. Si en la integral $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ se hace de manera formal la sustitución de variable $x = 1/t$ y se escribe

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt = -\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{\pi}{2}, \qquad (2)$$

entonces se obtiene, evidentemente, un resultado incorrecto.

El error consiste en que al cambio de x en el segmento $[-1, 1]$ corresponde la variación de $t = 1/x$ no en el segmento $[-1, 1]$, como lo requiere la igualdad [2], sino que en la reunión de las semirrectas $(-\infty, -1]$ y $[1, +\infty)$. De esta manera la sustitución indicada de la variable no satisface los requisitos del teorema 4.

8. Calcular $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0{,}5 \cos x}$.

$\triangle$ La función integrando $f(x) = \frac{1}{1+0{,}5 \cos x}$ es continua en el segmento $[0, 2\pi]$ y, por consiguiente, tiene una primitiva .Para encontrar la primitiva de la función $f(x)$, como sustitución adecuada de la variable es $t = \operatorname{tg}(x/2)$ (véase el cap. V). Sin embargo, para la integral definida I semejante sustitución no satisface las condiciones del teorema 4, puesto que al cambio de x en el segmento $[0, 2\pi]$ no corresponde la variación de t en cierto segmento: $t = \operatorname{tg}(x/2) \to +\infty$ $(-\infty)$ para $x \to \pi - 0$ $(\pi + 0)$. Por eso aprovechemos el cambio indicado de variable para encontrar la primitiva de la función integrando. Examinemos la integral indefinida $\int \frac{dx}{1+0{,}5 \cos x}$. En cada uno de los intervalos $0 \leqslant x < \pi$ y $\pi < x \leqslant 2\pi$ para ésta es admisible el cambio de la variable $t = \operatorname{tg}(x/2)$.

En el primer caso como función interviene $x = 2 \operatorname{arctg} t$ $(0 \leqslant t < +\infty)$, en el segundo $x = 2(\pi + \operatorname{arctg} t)$ $(-\infty < t \leqslant 0)$. En

cada caso $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ y obtenemos

$$\Phi(x)=\int\frac{dx}{1+0,5\cos x}=4\int\frac{dt}{3+t^2}\Big|_{t=\operatorname{tg}(x/2)}+C=$$
$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

Para cualquier constante C la función $\Phi(x)$ es primitiva respecto de $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\cos x}$ en los intervalos $[0, \pi)$ y $(\pi, 2\pi]$. Puesto que ella tiene en el punto $x=\pi$ una discontinuidad de I especie: $\Phi(\pi+0)-\Phi(\pi-0)=-\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$, entonces $\Phi(x)$ no es la primitiva para $f(x)=\frac{1}{1+0,5\cos x}$ en todo el segmento $[0, 2\pi]$. Sin embargo, con ayuda de $\Phi(x)$ ahora ya es fácil construir la primitiva para $f(x)$ en todo el segmento $[0, 2\pi]$. Hagamos

$$F(x)=\begin{cases}\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) & \text{para } 0\leqslant x<\pi,\\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{para } x=\pi,\\ \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\frac{4\pi}{\sqrt{3}} & \text{para } \pi<x\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

De esta manera en $[0, \pi)$ hemos tomado $C=0$, en el punto $x=\pi$ hemos definido adicionalmente $\Phi(x)$ (para $C=0$) en cuanto a la continuidad a la izquierda y en $(\pi, 2\pi)$ hemos tomado $C=4\pi/\sqrt{3}$. Hemos obtenido la función $F(x)$, cuya derivada en todos los puntos del segmento $[0, 2\pi]$, incluyendo también el punto $x=\pi$, es igual a la función $f(x)$ (para el punto $x=\pi$ demuestre este hecho por su propia cuenta), es decir, $F(x)$ es la primitiva para $f(x)$ en $[0, 2\pi]$. Según la fórmula de Newton — Leibniz

$$I=F(x)\Big|_0^{2\pi}=F(2\pi)-F(0)=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}-0=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}. \quad ▲$$

OBSERVACIÓN. Se podría dividir la integral I en dos integrales: $I=\int_0^{\pi}f(x)\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}f(x)\,dx$ y aprovechar el hecho de que la primitiva para $f(x)$ en $[0, \pi]$ es la función

$$F_1(x)=\begin{cases}\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) & \text{para } 0\leqslant x<\pi,\\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{para } x=\pi,\end{cases}$$

y en $[\pi, 2\pi]$, la función

$$F_2(x)=\begin{cases}\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) & \text{para } \pi<x\leqslant 2\pi,\\ -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{para } x=\pi\end{cases}$$

($F_1(x)$ se obtiene a partir de $\Phi(x)$ para $C=0$ con ayuda de la definición adicional de $\Phi(x)$ en el punto $x=\pi$, ateniéndose a la continuidad a la izquierda, y $F_2(x)$, a la derecha). En este caso, empleando la fórmula de Newton — Leibniz para cada una de las integrales, obtenemos

$$I=F_1(x)\Big|_0^{\pi}+F_2(x)\Big|_{\pi}^{2\pi}=F_1(\pi)-F_1(0)+$$
$$+F_2(2\pi)-F_2(\pi)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}-0+0-\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

9. Calcular $I=\int\limits_{1/e}^{e}|\ln x|\,dx.$

△ Dividiendo la integral I en la suma de integrales de los segmentos $[1/e, 1]$ y $[1, e]$ (para «liberarse del módulo») y empleando en cada integral la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$I=-\int\limits_{1/e}^{1}\ln x\,dx+\int\limits_{1}^{e}\ln x\,dx=-x\ln x\Big|_{1/e}^{1}+\int\limits_{1/e}^{1}dx+$$
$$+x\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e dx=-\frac{1}{e}+\left(1-\frac{1}{e}\right)+e-(e-1)=$$
$$=2\left(1-\frac{1}{e}\right).\ ▲$$

10. Calcular $I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\operatorname{sen}x}{1+\cos^2 x}\,dx.$

△ Apliquemos la fórmula de integración por partes;

$$I=-\int\limits_0^{\pi}x\frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}=-\int\limits_0^{\pi}x\,d(\operatorname{arctg}(\cos x))=$$
$$=-x\operatorname{arctg}(\cos x)\Big|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}\operatorname{arctg}(\cos x)\,dx=$$
$$=-\pi\left(-\frac{\pi}{4}\right)-0+I_1=\frac{\pi^2}{4}+I_1,$$

donde $I_1=\int\limits_0^{\pi}\operatorname{arctg}(\cos x)\,dx.$

Para hallar I_1, advirtamos que la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{arctg}(\cos x)$ es centralmente simétrica respecto al punto $(\pi/2, f(\pi/2)) = (\pi/2, 0)$. Por eso las integrales de esta función en los segmentos $[0, \pi/2]$ y $[\pi/2, \pi]$ son iguales en módulo y tienen signos contrarios, lo que signfica que en suma se anulan, es decir, $I_1 = 0$. Este hecho puede determinarse de la manera siguiente: dividamos I_1 en dos integrales correspondientes a los segmentos $[0, \pi/2]$ y $[\pi/2, \pi]$, respectivamente, y en la segunda integral hagamos el cambio de la variable $x = \pi - t$. Obtendremos

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{arctg}(\cos x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos x)\,dx + \int_{\pi/2}^{0} \operatorname{arctg}(-\cos t)\,(-dt) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos x)\,dx - \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos t)\,dt = 0.$$

Así, pues, $I_1 = 0$, por eso $I = \pi^2/4$. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

14. Hállense las derivadas:

a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^b \operatorname{sen}(x^2)\,dx$; b) $\dfrac{d}{db}\displaystyle\int_a^b \operatorname{sen}(x^2)\,dx$;

c) $\dfrac{d}{da}\displaystyle\int_a^{x^2} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$; d) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt$;

e) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{x^2} \sqrt{1+x^2}\,dx$; f) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$;

g) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; h) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{t^2}^{x^2} \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$;

i) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{x^2}^{t^2} \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; k) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$;

l) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{t^2}^{x^2} \dfrac{dt}{\sqrt{x^2-t^4}}$.

15. Calcúlense las integrales;

a) $\int\limits_{\text{sh}\,1}^{\text{sh}\,2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; b) $\int\limits_0^2 |1-x|\,dx$;

c) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}\ (0<\alpha<\pi)$.

16. Explíquese por qué el empleo formal de la fórmula de Newton — Leibniz conduce a resultados incorrectos y calcúlese, haciendo uso de la primitiva para la función continua a trozos o dividiendo en partes el intervalo de integración, las integrales siguientes:

a) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^2 x\,(2+\operatorname{tg}^2 x)}$, b) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right) dx$.

17. Calcúlese $\int\limits_0^2 f(x)\,dx$, donde $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{para } 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x & \text{para } 1<x\leqslant 2, \end{cases}$

empleando dos procedimientos: a) utilizando la primitiva para $f(x)$, construida en todo el segmento $[0, 2]$; b) dividiendo el segmento $[0, 2]$ en dos segmentos $[0, 1]$ y $[1, 2]$.

18. Aplicando la fórmula de integración por partes, calcúlense las integrales siguientes:

a) $\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx$; b) $\int\limits_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$; c) $\int\limits_0^{1} \arccos x\,dx$.

19. Empleando una sustitución adecuada de la variable, calcúlense las integrales siguientes:

a) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$; b) $\int\limits_0^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$;

c) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$; d) $\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$.

20. ¿Se podrá calcular la integral $\int\limits_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ con ayuda del cambio de la variable $x=\operatorname{sen} t$?

21. ¿Se podrá al calcular la integral $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ con ayuda del cambio de la variable $x = \operatorname{sen} t$, tomar como nuevos límites de integración los siguientes números a) π y $\pi/2$; b) 2π y $5\pi/2$; c) π y $5\pi/2$? Calcúlese la integral para cada caso en que la mencionada sustitución es admisible.

22. Demuéstrese que para la función $f(x)$ continua en $[-l, l]$ es válida la igualdad:

a) $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx$, si $f(x)$ es una función par;

b) $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0$, si $f(x)$ es una función impar.

Dése la ilustración geométrica de estos fenómenos. ¿Serán válidas estas igualdades, si $f(x)$ es integrable en $[-l, l]$, pero no es obligatoriamente una función continua?

23. Demuéstrese que una de las primitivas de una función par es función impar, en tanto que cada primitiva de una función impar es función par.

24. Calcúlense las integrales:

a) $\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$; b) $\int_{1}^{e} (x \ln x)^2\,dx$;

c) $\int_{0}^{3} \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$;

d) $\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$;

e) $\int_{0}^{1/2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x\,dx$; e) $\int_{0}^{\pi} (x \operatorname{sen} x)^2\,dx$.

25. Recurriendo a la fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ (i es la unidad imaginaria), muéstrese que

$$\int_{0}^{2\pi} e^{inx} \cdot e^{-imx}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n, \\ 2\pi & \text{para } m = n \end{cases}$$

$\left(\text{empléese la igualdad } \int_a^b [f(x) + ig(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + i\int_a^b g(x)\,dx\right)$.

26. Muéstrese que

$$\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x}\,dx = \frac{e^{b(\alpha+i\beta)} - e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha+i\beta}$$

(empléese la igualdad $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$).

27. Aplicando las fórmulas de Euler

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

calcúlense las integrales

a) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} x \cos^{2n} x \, dx$; b) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{\operatorname{sen} x} dx$;

c) $\int\limits_0^{\pi} \cos^n x \cos nx \, dx$; $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{sen}^n x \operatorname{sen} nx \, dx$.

§ 4. Cálculo de las longitudes de las curvas planas

I. Conceptos fundamentales y fórmulas

1. Longitud de una curva. Examinemos en un plano la curva dada en forma paramétrica:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{1}$$

donde $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son funciones continuas en el segmento $[\alpha, \beta]$, además a diferentes valores de $t \in [\alpha, \beta]$ corresponden distintos puntos (x, y) (es decir, no hay puntos múltiples). A semejante curva la llamaremos *curva simple (plana) abierta*.

Si los puntos $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ y $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ coinciden y los demás puntos no son múltiples, entonces la curva L se llama *curva simple cerrada*.

Sea L una curva simple (cerrada o abierta) dada mediante las ecuaciones (1). Examinemos la división arbitraria del segmento $[\alpha, \beta]$ por los puntos $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$. A ésta corresponde la división de la curva L por los puntos $A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$, donde $M_i = M(\varphi(t_i), \psi(t_i))$. Inscribamos en la curva L la quebrada $AM_1M_2 \ldots B$. Designemos la longitud de la quebrada a través de $l(M_i)$ y hagamos $\Delta t = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (t_i - t_{i-1})$.

DEFINICIÓN. *El número l se llama* ***límite de las longitudes de las quebradas*** *$l(M_i)$ cuando $\Delta t \to 0$, si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que, para cualquier división del segmento $[\alpha, \beta]$, en la cual $\Delta t < \delta$, se cumple la desigualdad $0 \leqslant l - l(M_i) < \varepsilon$.*

DEFINICIÓN. *Si existe el límite de las longitudes de las quebradas cuando $\Delta t \to 0$, entonces la curva L se llama* ***rectificable*** *y el número l,* ***longitud de la curva*** *L (o* ***longitud del arco de la curva*** *L).*

2. Longitud de una curva dada en forma paramétrica.

Teorema 12. *Sea una curva simple L dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, además las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ tienen en el segmento $[\alpha, \beta]$ derivadas continuas. Entonces la curva L es rectificable, y su longitud se calcula con la fórmula*

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \, dt. \tag{2}$$

La función

$$l(t)=\int_{\alpha}^{t}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \qquad (3)$$

se llama *arco variable.*

3. Longitud de una curva en coordenadas cartesianas. Si una curva viene dada mediante la ecuación $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, además la función $f(x)$ tiene en el segmento $[a, b]$ una derivada continua, tendremos que la longitud de la curva se calcula por la fórmula

$$l=\int_{a}^{b}\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \qquad (4)$$

4. Longitud de una curva en coordenadas polares. Si una curva viene dada con la ecuación $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$, con la particularidad de que la función $\rho(\varphi)$ tiene en el segmento $[\varphi_1, \varphi_2]$ una derivada continua, la longitud de la curva se calculará por la fórmula

$$l=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

Si la curva viene expresada por medio de la ecuación $\varphi=\varphi(\rho)$, $\rho_1\leqslant\rho\leqslant\rho_2$, además la función $\varphi(\rho)$ tiene en el segmento $[\rho_1, \rho_2$ una derivada continua, la longitud de la curva se calculará según la fórmula

$$l=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\sqrt{1+\rho^2\varphi'^2(\rho)}\,d\rho.$$

II. Preguntas y tareas de control

1. ¿Qué se llama curva simple abierta (cerrada)?
2. Dése la definición del límite de las longitudes de las quebradas cuando $\Delta t\to 0$.
3. ¿Qué se llama curva rectificable?
4. ¿Qué es la longitud de una curva?
5. ¿Qué fórmulas se emplean para calcular la longitud de una curva: a) dada en forma paramétrica; b) en coordenadas cartesianas; c) en coordenadas polares?
6. Adúzcanse ejemplos de curvas rectificables.
7. ¿La recta es una curva rectificable?
8. ¿La circunferencia es una curva simple?

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Hallar la longitud de la parábola $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

△ Según la fórmula (4) obtenemos

$$l=\int_0^2 \sqrt{1+4x^2}\,dx=\sqrt{17}+\frac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17}). \quad ▲$$

2. Hallar la longitud de una «rama» de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

△ Según la fórmula (2) encontramos

$$l=a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2+\operatorname{sen}^2 t}\,dt=8a. \quad ▲$$

3. Hallar el arco variable de la elipse: $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $a > b$.

△ Según la fórmula (3) obtenemos

$$l(t)=a\int_0^t \sqrt{1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\operatorname{sen}^2 t}\,dt=a\int_0^t \sqrt{1-\varepsilon^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt,$$

donde $\varepsilon=\sqrt{a^2-b^2}/a$ es la excentricidad de la elipse. ▲

De esta manera, el arco variable de la elipse se expresa mediante la integral que se llama integral elíptica de II especie:

$$l(t)=a\int_0^t \sqrt{1-\varepsilon^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt=aE(\varepsilon,\ t).$$

Esta integral no tiene primitiva elemental, pero se emplea con profusión en las matemáticas. Su nombre se explica precisamente por su ligazón con el problema examinado.

Si $t = \pi/2$, la integral expresa 1/4 de longitud de la elipse. En este caso la integral elíptica $E(\varepsilon, \pi/2)$ se llama integral elíptica completa y se escribe $E(\varepsilon)$.

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

28. Hállense las longitudes de las curvas dadas mediante las ecuaciones:

a) $y=x^{3/2}$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$; b) $x=\frac{y^2}{4}-\frac{1}{2}\ln y$ $(1\leqslant y\leqslant e)$;

c) $y=\ln\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant a<\pi/2)$; d) $y^2=\frac{x}{2a-x}$ $(0\leqslant x\leqslant 5a/3)$;

e) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; f) $x=\cos^4 t$, $y=\operatorname{sen}^4 t$;

g) $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 8\pi)$; préstese atención a los límites de integración;

h) $\rho = a\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ (espiral de Arquímedes);

i) $\rho = a\,(1 + \cos\varphi)$; k) $\rho = a\,\text{sen}^3\,(\varphi/3)$; l) $\varphi = \sqrt{\rho}$ $(0 \leqslant \leqslant \rho \leqslant 5)$.

29. Demuéstrese que la longitud de la elipse $x = a\cos t$, $y = b\,\text{sen}\,t$ es igual a la longitud de la sinusoide $y = c\,\text{sen}\,(x/b)$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi/b$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Dése la ilustración geométrica de este resultado, ligando las longitudes de la elipse y de la sinusoide con la sección de cierto cilindro.

§ 5. Cálculo de áreas de las figuras planas

I. Conceptos fundamentales y fórmulas

1. Área de una figura plana. Llamaremos *figura plana* a cualquier conjunto acotado de los puntos de un plano.

Sea que en la figura dada viene inscrita una figura poligonal y alrededor de la primera, circunscrita otra figura poligonal, es decir, una figura formada por un número finito de triángulos.

El conjunto de las áreas de todas las figuras poligonales inscritas está acotado superiormente (por el área de cualquier figura circuns-

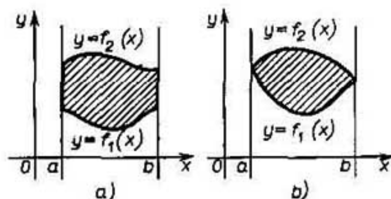


Fig. 17.

crita), y el conjunto de las áreas de todas las figuras poligonales circunscritas está acotado inferiormente (por ejemplo, por el cero).

DEFINICIÓN. *Una figura plana se llama* ***cuadrable****, si la cota superior exacta $\underline{P}$ del conjunto de áreas de todas las figuras poligonales inscritas es igual a la cota inferior exacta $\overline{P}$ del conjunto de áreas de todas las figuras poligonales circunscritas.*

El número $P = \underline{P} = \overline{P}$ se llama *área de la figura plana* (en sentido de Jordan).

Teorema 13 (CONDICIÓN SUFICIENTE DE FIGURA CUADRABLE). *Para que una figura plana sea cuadrable, es suficiente que su cota (frontera) sea una curva rectificable.*

2. Área de una figura plana en coordenadas cartesianas. Sea una figura plana en forma de un trapecio mixtilíneo limitado por unas curvas continuas $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ [donde $y_1(x) \leqslant y_2(x)$] y dos tramos de rectas $x = a$, $x = b$ (fig. 17, *a*). Los tramos de las

rectas pueden degenerar en un punto (fig. 17, *b*). Entonces el área de la figura se calcula según la fórmula

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx. \tag{1}$$

3. Área de una figura plana en el caso en que su cota se da en forma paramétrica. Sea la cota de una figura plana G una curva cerrada simple dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, además el punto $(\varphi(t), \psi(t))$, cuando

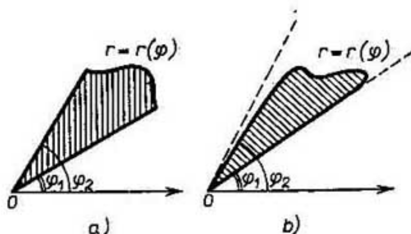


Fig. 18.

t varía desde 0 hasta T recorre la cota G de tal manera que la figura G quede a la izquierda del punto en movimiento. Entonces el área de la figura G puede calcularse por cualquiera de las fórmulas siguientes:

$$S = -\int_0^T \psi(t)\,\varphi'(t)\, dt, \tag{2}$$

$$S = \int_0^T \varphi(t)\,\psi'(t)\, dt, \tag{3}$$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T [\varphi(t)\,\psi'(t) - \varphi'(t)\,\psi(t)]\, dt. \tag{4}$$

4. Área de una figura plana en coordenadas polares. Supongamos que una figura plana tiene la forma de un sector curvilíneo limitado por la curva continua $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, $0 < \varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 2\pi$ y los tramos de rayos $\varphi = \varphi_1$ y $\varphi = \varphi_2$ (fig. 18, *a*). Los tramos de rayos pueden degenerar en el punto O (fig. 18, *b*). Entonces el área de la figura se calcula con la fórmula

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \tag{5}$$

II. Preguntas y tareas de control

1. ¿Qué es una figura plana?
2. ¿Qué es una figura cuadrable?
3. ¿Qué es el área de una figura plana?
4. ¿Aplicando qué fórmulas se calcula el área de una figura: a) en coordenadas cartesianas; b) en el caso de que la cota viene dada en forma paramétrica; c) en coordenadas polares?
5. Adúzcanse ejemplos de figuras cuadrables.
6. ¿El plano es una figura cuadrable?
7. ¿La recta es una figura cuadrable?

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Hallar el área de una figura limitada por las curvas $y = |x - 1|$, $y = 3 - |x|$.

△ Las curvas dadas se intersecan en dos puntos (fig. 19). Resolviendo la ecuación $3 - |x| = |x - 1|$, encontraremos las absci-

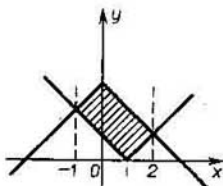


Fig. 19.

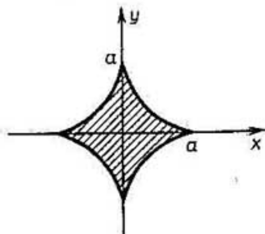


Fig. 20.

sas de estos puntos: $x = -1$, $x = 2$. Por eso

$$S = \int_{-1}^{2} (3 - |x| - |x - 1|)\, dx.$$

Dividamos la integral en tres integrales en correspondencia con los segmentos $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$. Obtenemos

$$S = \int_{-1}^{0} [(3 + x) - (1 - x)]\, dx + \int_{0}^{1} [(3 - x) - (1 - x)]\, dx + \int_{1}^{2} [(3 - x) - (x - 1)]\, dx = 1 + 2 + 1 = 4. \ \blacktriangle$$

2. Hallar el área de una figura acotada por la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (fig. 20).

△ Haciendo $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, llegamos a las ecuaciones paramétricas de la astroide (el parámetro t desempeña el papel del ángulo polar del punto (x, y) en la astroide). Según la fórmula (4) obtenemos

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a\cos^3 t \cdot 3a \operatorname{sen}^2 t \cos t + 3a\cos^2 t \operatorname{sen} t \cdot a \operatorname{sen}^3 t]\,dt =$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t\,dt = \frac{3}{8}\pi a^2. \quad \blacktriangle$$

OBSERVACIÓN 1. La fórmula simétrica (4) condujo aquí a una integral más simple que aquella que se obtendría a consecuencia de emplear las fórmulas (2) ó (3).

OBSERVACIÓN 2. Es de señalar que la integral en el segmento $[0, \pi/2]$

$$\frac{3a^2}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t\,dt = \frac{3}{32}\pi a^2$$

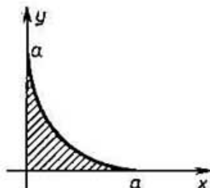


Fig. 21.

da el área de aquella parte de la figura que se halla en el I cuadrante (fig. 21), aunque en este caso toda la cota de la figura ya no se describe por las ecuaciones $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$, puesto que contiene los tramos de los ejes de coordenadas. ¿Por qué entonces se ha obtenido el resultado correcto? El hecho consiste en que el segmento $[0, a]$ del eje Oy puede darse en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x = 0$, $y = 2a(1 - t/\pi)$, $\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi$ y el segmento $[0, a]$ del eje Ox, por medio de las ecuaciones $x = 2a(t/\pi - 1)$, $y = 0$, $\pi \leqslant t \leqslant 3\pi/2$. Empleando ahora la parametrización completa de la cota de la figura (el parámetro t varía desde 0 hasta $3\pi/2$) y dividiendo la integral en el segmento $[0, 3\pi/2]$ en tres integrales, correspondientes a los tramos de la cota, uno de los cuales es curvilíneo y los otros dos son rectilíneos, obtenemos que las integrales en los segmentos de los ejes de coordenadas se anulan, ya que en cada uno de ellos una coordenada y su derivada según el parámetro son nulas.

Por la misma causa la fórmula (2) sigue siendo válida para el trapecio mixtilíneo acotado por el segmento del eje Ox, dos segmentos verticales y la curva dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, si al variar t desde 0 hasta T el punto $(\varphi(t), \psi(t))$ recorre la curva de tal manera que el trapecio queda a la izquierda del punto. En caso contrario en la fórmula (2) delante de la integral hay que poner el signo positivo.

3. Hallar el área de una figura acotada por la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ y el eje Ox.

△ Según la fórmula (2) (donde, en vigor de la observación 2, delante de la integral se toma el signo positivo) tenemos

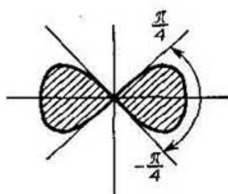


Fig. 22.

$$S=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,dt=3\pi a^2. \ \blacktriangle$$

4. Hallar el área de una figura acotada por una curva dada en coordenadas polares mediante la ecuación $\rho^2=2a^2\cos 2\varphi$ (lemniscata de Bernoulli).

△ Tomando en consideración el carácter no negativo de ρ^2, encontramos que $-\pi/4\leqslant \varphi\leqslant\pi/4$ y $3\pi/4\leqslant\varphi\leqslant 5\pi/4$ (fig. 22). Con la fórmula (5) calculamos el área de una de las dos partes iguales de la figura y duplicamos el resultado:

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi=2a^2. \ \blacktriangle$$

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

30. Hállese el área de una figura, cuya cota viene prefijada mediante las ecuaciones en coordenadas cartesianas:

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $x=x_0$, $x=x_1$, $y\geqslant 0$ $(-a<x_0<x_1<a)$;

b) $y=x^2$, $x+y=2$; c) $y=(x+1)^2$, $x=\operatorname{sen}\pi y$, $y=0$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$;

d) $y^2=x^2(a^2-x^2)$;

e) $y=e^{-x}\,|\operatorname{sen} x|$, $y=0$ $(x\geqslant 0)$ (por área de esta figura no acotada admítase el límite para $A\to+\infty$ de las áreas de trapecios mixtilíneos que corresponden al cambio de x desde 0 hasta A).

31. Hállese el área de una figura, cuya cota viene expresada en forma paramétrica (dibújese previamente el esbozo de la figura):

a) $x=a(\cos t+t\operatorname{sen} t)$, $y=a(\operatorname{sen} t-t\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $x=a$, $y\leqslant 0$ (desarrollo de un círculo);

b) $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} 2t)$.

32. Hállese el área de una figura, cuya cota viene dada mediante la ecuación en coordenadas polares: a) $\rho=a(1+\cos\varphi)$ (cardioide); b) $\rho=a\operatorname{sen} 3\varphi$ (trifolio); c) $\rho=3+2\cos\varphi$; d) $\rho^2+\varphi^2=1$.

33. Pasando a las coordenadas polares, hállese el área de una figura, cuya cota viene expresada mediante la ecuación: a) $x^3+y^3=3axy$ (folio de Descartes); b) $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ (lemniscata de Bernoulli).

§ 6. Cálculo de los volúmenes de sólidos

I. Conceptos fundamentales y fórmulas

1. Volumen de un sólido (SEGÚN JORDAN). Llamaremos *sólido* a un conjunto acotado cualquiera de puntos del espacio.

Supongamos que en el sólido dado está inscrito un poliedro y alrededor del mismo está circunscrito otro poliedro, es decir, un sólido formado por un número finito de pirámides triangulares.

El conjunto de volúmenes de todos los poliedros inscritos está acotado superiormente (por el volumen de cualquier poliedro circunscrito) y el conjunto de volúmenes de todos los poliedros circunscritos está acotado inferiormente (por ejemplo, por el cero).

DEFINICIÓN. *Un sólido se llama* ***cubicable****, si la cota superior exacta* $\underline{V}$ *del conjunto de volúmenes de todos los poliedros inscritos es igual a la cota inferior exacta* $\overline{V}$ *del conjunto de volúmenes de todos los poliedros circunscritos.*

El número $V = \underline{V} = \overline{V}$ se llama *volumen del sólido* (EN EL SENTIDO DE JORDAN).

2. Volumen de un sólido con las secciones transversales conocidas. Supongamos que cada sección de un sólido cubicable cortada por el plano $x =$ const es una figura cuadrable, además su área $S(x)$ es una función continua x ($a \leqslant x \leqslant b$). Entonces el volumen de este cuerpo se calcula según la fórmula

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{1}$$

En el caso particular, en que el sólido se ha obtenido al hacer girar alrededor del eje Ox un trapecio mixtilíneo prefijado por una función continua $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, el volumen del sólido de revolución se calcula según la fórmula

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{2}$$

II. Preguntas y tareas de control

1. ¿Qué se llama sólido?
2. ¿Qué significa sólido cubicable?
3. ¿Qué es el volumen de un sólido?
4. ¿Aplicando qué fórmula se calcula: a) el volumen de un sólido con las secciones transversales conocidas; b) el volumen de un sólido de revolución?
5. Adúzcanse ejemplos de sólidos cubicables.
6. ¿Puede un plano ser un sólido cubicable?
7. ¿Puede una recta ser un sólido cubicable?

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Hallar el volumen de un sólido obtenido al girar la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ alrededor del eje Ox.



△ Según la fórmula (2) tenemos

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\pi ab^2. \quad ▲$$

2. Hallar el volumen de un sólido acotado por las superficies $x^2+y^2=a^2$, $z=\sqrt{3}\,y$, $z=0$ $(y\geqslant 0)$.

△ I PROCEDIMIENTO. Examinemos las secciones de este sólido cortadas por los planos $x=\text{const}$. En las secciones se obtienen triángulos rectángulos con áreas

$$S(x)=\frac{1}{2}y(x)z(x)=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{3}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2-x^2).$$

Con la fórmula (1) encontramos



$$V=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3.$$

II PROCEDIMIENTO. Cortando este mismo sólido por los planos $y=\text{const}$, en las secciones obtendremos rectángulos con áreas

$$S(y)=2x(y)z(y)=2\sqrt{a^2-y^2}\sqrt{3}y.$$

Por eso

$$V=2\sqrt{3}\int_{0}^{a}y\sqrt{a^2-y^2}\,dy=\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3. \quad ▲$$

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

34. Hállese el volumen de un cono truncado, cuyas bases están acotadas por elipses con semiejes A, B y a, b, y la altura es igual a h.

35. Un sólido es en sí un conjunto de puntos $M(x, y, z)$, donde $0\leqslant z\leqslant 1$. Además $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, si z es un número racional, y $-1\leqslant x\leqslant 0$, $-1\leqslant y\leqslant 0$, si z es un número irracional. Demuéstrese que este sólido no tiene volumen, aunque $\int_0^1 S(z)\,dz = 1$.

36. Hállense los volúmenes de unos sólidos, cuyas superficies vienen expresadas por las ecuaciones:

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=\frac{c}{a}x$, $z=0$; b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $z=\pm c$; d) $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$;
e) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$ (sólido de Viviani).

37. Hállense los volúmenes de unos sólidos obtenidos al girar las curvas siguientes:

a) $y = b\,(x/a)^{2/3}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ alrededor del eje Ox;
b) $y = 2x - x^2$, $y = 0$ alrededor del eje Ox;
c) $y = 2x - x^2$, $y = 0$ alrededor del eje Oy;
d) $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ alrededor del eje Ox;
e) $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ alrededor del eje Oy;
f) $x = a\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ alrededor del eje Ox;
g) $x = a\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ alrededor del eje Oy.

§ 7. Aplicaciones físicas de la integral definida

I. Conceptos fundamentales y fórmulas

1. Cálculo de la masa de una curva plana. Sea una curva simple L dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ y sea $\rho(x, y)$ la densidad lineal de masa en el punto $(x, y) \in L$. Entonces la masa de la curva L se calcula con la fórmula

$$M=\int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi(t),\ \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

En caso de que la curva simple venga expresada por medio de una ecuación en coordenadas cartesianas $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, la masa de la curva L se calculará de acuerdo con la fórmula

$$M=\int_{a}^{b} \rho(x,\ f(x)) \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

En particular, cuando $\rho \equiv 1$ el valor numérico de la masa coincide con la longitud de la curva.

2. Cálculo de los momentos y de las coordenadas del centro de gravedad de una curva plana. Los momentos estáticos (o momentos de primer orden) de una curva L respecto a los ejes de coordenadas en el caso de densidad lineal constante $\rho \equiv 1$ (momentos geométricos) se calculan utilizando las fórmulas ($x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ son las ecuaciones de la curva)

$$M_x=\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \text{ (momento respecto al eje } Ox);$$

$$M_y=\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \text{ (momento respecto al eje } Oy).$$

Si una curva viene dada en coordenadas cartesianas: $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, tendremos

$$M_x=\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,\quad M_y=\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Las coordenadas x_0 e y_0 del centro de gravedad de la curva L se calculan con las fórmulas

$$x_0=M_y/l,\quad y_0=M_x/l,$$

donde l es la longitud de la curva L.

Los momentos de inercia (o momentos de segundo orden) de la curva L respecto a los ejes de coordenadas ($\rho\equiv 1$) se calculan aplicando las fórmulas

$$I_x=\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \text{ (respecto al eje } Ox);$$

$$I_y=\int_\alpha^\beta \varphi^2(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \text{ (respecto al eje } Oy)$$

o (en coordenadas cartesianas)

$$I_x=\int_a^b f^2(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

$$I_y=\int_a^b x^2\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

3. Cálculo de los momentos y de las coordenadas del centro de gravedad de una figura plana. Los momentos estáticos de una figura G limitada por las curvas continuas $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ [donde $f_1(x)\leqslant f_2(x)$] y los segmentos de rectas $x=a$, $x=b$, en el caso de densidad superficial constante $\rho\equiv 1$, se calculan haciendo uso de las fórmulas

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b [f_2^2(x)-f_1^2(x)]\,dx \text{ (respecto al eje } Ox), \tag{1}$$

$$M_y=\int_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]\,dx \text{ (respecto al eje } Oy). \tag{2}$$

Las coordenadas x_0 e y_0 del centro de gravedad de una figura se calculan por las fórmulas

$$x_0=M_y/S,\quad y_0=M_x/S, \tag{3}$$

donde S es el área de la figura G.

Los momentos de inercia de la figura G respecto a los ejes de coordenadas ($\rho = 1$) se calculan con las fórmulas

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b [f_2^3(x) - f_1^3(x)]\,dx \text{ (respecto al eje } Ox);$$

$$I_y = \int_a^b x^2 [f_2(x) - f_1(x)]\,dx \text{ (respecto al eje } Oy).$$

II. Ejemplos de resolución de problemas

1. Hallar los momentos estáticos y las coordenadas del centro de gravedad de un trapecio mixtilíneo acotado por la parábola $y^2 = f_2^2(x) = 2px$ y las rectas $y = f_1(x) = 0$ y $x = 1$.

△ Con las fórmulas (1) y (2) encontramos

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^1 f_2^2(x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot 2p \int_0^1 x\,dx = \frac{p}{2};$$

$$M_y = \int_0^1 x f_2(x)\,dx = \sqrt{2p} \int_0^1 x^{3/2}\,dx = \frac{2\sqrt{2p}}{5}.$$

Calculemos el área de este trapecio mixtilíneo:

$$S = \sqrt{2p} \int_0^1 x^{1/2}\,dx = \frac{2\sqrt{2p}}{3}.$$

Ahora utilizando las fórmulas (3) hallemos las coordenadas del centro de gravedad

$$x_0 = M_y/S = 3{,}5, \quad y_0 = M_x/S = (3/8)\sqrt{2p}. \ ▲$$

2. Empleando el segundo teorema de Guldin (véase más adelante el ejer. 44), hallar las coordenadas del centro de gravedad de una figura plana G limitada por un arco de la cicloide $x = a(t - \text{sen } t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ y el eje Ox.

△ El volumen del sólido obtenido, al hacer girar la figura alrededor del eje Ox, es igual a

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2\,dx = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\,dt = 5\pi^2 a^3.$$

El área de la figura G es igual a

$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2\,dt = 3\pi a^2.$$

Sea y_0 la ordenada del centro de gravedad. Según el segundo teorema de Guldin, $S \cdot 2\pi y_0 = V$, de donde $y_0 = 5a/6$. De la simetría de la figura G respecto a la recta $x = \pi a$ se deduce que la abscisa del centro de gravedad $x_0 = \pi a$. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

38. Hállense el momento estático y el momento de inercia de una semicircunferencia de radio a respecto al diámetro de ésta.

39. Hállese el momento estático del arco de la parábola $y^2 = 2px$ $(0 \leqslant x \leqslant p/2)$ respecto a la recta $x = p/2$.

40. Hállense el momento estático y el momento de inercia de una lámina homogénea triangular con base b y altura h respecto a su propia base.

41. Hállense los momentos de inercia de una lámina elíptica homogénea con semiejes a y b respecto a sus ejes principales.

42. Hállese el momento de inercia de un círculo homogéneo con radio R y masa M respecto a su diámetro.

43. Demuéstrese el primer teorema de Guldin: el área de una superficie, formada al girar una curva plana alrededor de un eje que no la corta y yace en el plano de la curva, es igual al producto de la longitud de esta curva por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad de la misma.

44. Demuéstrese el segundo teorema de Guldin: el volumen de un sólido, formado por rotación de una figura plana alrededor de un eje que no la corta y yace en el plano de la figura, es igual al producto del área de esta figura por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad de esta figura.

45. Hállese el volumen de un toro obtenido por medio de rotación de la circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ alrededor del eje Oy.

46. Hállense las coordenadas del centro de gravedad del arco de la circunferencia $x = a \cos \varphi$, $y = a \operatorname{sen} \varphi$ $(|\varphi| \leqslant \alpha \leqslant \pi)$.

47. Hállense las coordenadas del centro de gravedad de una figura acotada por las parábolas $ax = y^2$, $ay = x^2$ $(a > 0)$.

48. Hállense las coordenadas del centro de gravedad de un hemisferio homogéneo con el radio a.

49. Hállense las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la curva $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

Capítulo IX
Medida e integral de Lebesgue

§ 1. Medida de un conjunto

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Ciertas nociones sobre conjuntos. Se dice que entre los elementos de dos conjuntos se establece una *correspondencia biunívoca*, si a cada elemento del primer conjunto está puesto en correspondencia

cierto elemento del segundo conjunto de tal manera que, además, cada elemento del segundo conjunto corresponde sólo a un elemento del primer conjunto.

Dos conjuntos se llaman *equivalentes*, si entre sus elementos puede establecerse la correspondencia biunívoca. Si dos conjuntos son equivalentes, se dice que tienen igual *potencia*.

Un conjunto se llama *numerable*, si éste es equivalente al conjunto de los números naturales (con otras palabras, un conjunto se llama numerable, si sus elementos pueden numerarse con ayuda de los números naturales).

Por ejemplo, el conjunto de todos los números racionales del segmento [0, 1] es numerable, mientras que el conjunto de todos los números reales de este mismo segmento no es numerable.

Si un conjunto es equivalente al conjunto de todos los números reales del segmento [0, 1], se dice que aquél tiene la *potencia de continuo*.

Se llama *unión* (*suma*) de los conjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ el conjunto $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, compuesto por todos los elementos pertenecientes por lo menos a uno de los conjuntos E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Notaremos la unión de conjuntos E_1 y E_2 también con el símbolo $E_1 \cup E_2$ o $E_1 + E_2$.

Se llama *intersección* de los conjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ el conjunto $G = \bigcap_{k=1}^{n} E_k$, compuesto por todos los elementos pertenecientes a cada uno de los conjuntos E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Notaremos la intersección de los conjuntos E_1 y E_2 también con el símbolo $E_1 \cap E_2$ o E_1E_2.

De la misma manera se definen la unión $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y la intersección $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ de una cantidad numerable de conjuntos.

Se llama *diferencia* de los conjuntos E_1 y E_2 el conjunto $E = E_1 \setminus E_2$, compuesto por todos los elementos del conjunto E_1 pertenecientes a E_2.

Sea E un conjunto arbitrario de números. El punto x se llama punto *interior* de E, si existe un entorno del punto x que pertenece por completo a E.

El conjunto E se llama *abierto*, si todos sus puntos son interiores. El conjunto E se llama *cerrado*, si contiene todos sus puntos límites.

Por ejemplo, el intervalo (a, b) es un conjunto abierto, mientras que el segmento $[a, b]$ es un conjunto cerrado.

La unión de un número finito o de una cantidad numerable de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Teorema 1 (SOBRE LA ESTRUCTURA DE LOS CONJUNTOS ABIERTOS). *Todo conjunto abierto es la unión de un número finito o de una cantidad numerable de intervalos disjuntos dos a dos.*

2. Concepto de la serie numérica. Sea $\{a_n\}$ una sucesión numérica. Escribamos formalmente la expresión

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

y llamémosla *serie numérica* (o simplemente serie).

Los números a_k se llaman *términos* de la serie y el número $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, su n-ésima *suma parcial*.

Examinemos la sucesión $\{S_n\}$.

DEFINICIÓN. *Si existe el* $\lim_{n \to \infty} S_n = S$, *se dice que la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge y el número S se llama* ***suma de la serie.***

3. Medida de un conjunto. Llamaremos *medida de un intervalo* (α, β) (donde $\beta > \alpha$) su longitud $\beta - \alpha$.

Sea G un conjunto abierto acotado. Según el teorema 1 puede ser representado en la forma de $G = \bigcup_{k=1} (\alpha_k, \beta_k)$, donde (α_k, β_k) son intervalos disjuntos dos a dos.

Llamaremos *medida* μG *del conjunto abierto acotado* G la suma de las longitudes de sus intervalos: $\mu G = \sum_{k=1} (\beta_k - \alpha_k)$.

Cabe señalar que si la cantidad de los intervalos (α_k, β_k) es numerable, entonces la suma de longitudes de los intervalos es una serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k)$ con términos positivos $(\beta_k - \alpha_k)$. En virtud del acotamiento del conjunto G esta serie converge.

Sea E un conjunto acotado arbitrario. Examinemos todo género de conjuntos abiertos acotados G que contienen E. El conjunto $\{\mu G\}$ de las medidas de estos conjuntos está acotado inferiormente (por ejemplo, con el 0) y, por consiguiente, tiene $\inf \{\mu G\}$.

El número $\bar{\mu} E = \inf \{\mu G\}$ se llama *medida exterior* del conjunto E.

DEFINICIÓN. *El conjunto E se llama* ***medible (según Lebesgue)****, si* $\forall \varepsilon > 0$ *existe un conjunto abierto G que contiene E, para el cual* $\bar{\mu} (G \setminus E) < \varepsilon$. *Además la medida exterior del conjunto E se llama su* ***medida (de Lebesgue)*** *y se denota con* μE, es decir, $\mu E = \bar{\mu} E$.

OBSERVACIÓN. Para un conjunto abierto E esta definición es equivalente a la dada más arriba (como G es suficiente tomar el propio E).

La noción de medida de un conjunto generaliza el concepto de longitud. Para los conjuntos suficientemente simples (intervalo, segmento) la medida coincide con la longitud. Para conjuntos más complicados que no tienen longitud en sentido corriente, el papel de la longitud lo desempeña la medida.

Cualquier conjunto acotado cerrado es medible.

Si E es un conjunto medible, además $E \subset [a, b]$, entonces el conjunto $\overline{E} = [a, b] \setminus E$ (*complemento* del conjunto E hasta formar el segmento $[a, b]$) es medible.

La unión (si está acotada) y la intersección de un número finito o de una cantidad numerable de conjuntos medibles son conjuntos medibles. En este caso la medida de la unión de una cantidad numerable (o finita) de conjuntos disjuntos dos a dos, es igual a la suma de las medidas de estos conjuntos, es decir, si

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad E_i \cap E_j = \varnothing \ (i \neq j),$$

entonces

$$\mu E = \sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k.$$

Esta propiedad se llama *aditividad numerable* (o *aditividad* σ) de la medida de Lebesgue.

II. Preguntas y tareas de control

1. ¿En qué consiste la correspondencia biunívoca entre los elementos de dos conjuntos?
2. ¿Qué conjuntos se llaman equivalentes?
3. ¿Qué conjunto se llama numerable?
4. ¿Será numerable: a) el conjunto **Q** de todos los números racionales; b) el conjunto **R** de todos los números reales?
5. ¿Qué es un conjunto con potencia de continuo? ¿Tiene el conjunto **R** de todos los números reales la potencia de continuo?
6. ¿Qué se llama unión de conjuntos? ¿Puede la unión de conjuntos coincidir con uno de éstos? ¿Puede la unión de conjuntos no vacíos ser un conjunto vacío?
7. ¿Qué se llama intersección de conjuntos? ¿Puede la intersección de conjuntos coincidir con uno de éstos? ¿Puede la intersección de conjuntos no vacíos ser un conjunto vacío?
8. ¿Qué es la diferencia de dos conjuntos? ¿Puede la diferencia $E_1 \setminus E_2$ de conjuntos no vacíos coincidir: a) con E_1; b) con E_2?
9. ¿Qué es: a) un punto interior del conjunto; b) un conjunto abierto; c) un punto límite del conjunto; d) un conjunto cerrado?
10. ¿El conjunto **Q** de todos los números racionales es: a) abierto; b) cerrado?
11. ¿El conjunto **R** de todos los números reales es: a) abierto; b) cerrado?
12. Demuéstrese que la unión de un número finito o de una cantidad numerable de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
13. Demuéstrese que la intersección de un número finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, pero la intersección de una cantidad numerable de conjuntos abiertos puede no ser un conjunto abierto.

14. Demuéstrese que la intersección de un número finito o de una cantidad numerable de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
15. Demuéstrese que la unión de un número finito de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, mientras que la unión de una cantidad numerable de conjuntos cerrados puede no ser un conjunto cerrado.
16. Enúnciese el teorema sobre la estructura de los conjuntos abiertos.
17. ¿Cuándo se dice que la serie numérica converge? ¿Qué se llama suma de una serie?
18. Sean todos los términos de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ no negativos. Demuéstrese que en este caso: a) la condición necesaria y suficiente para la convergencia de la serie es el acotamiento de la sucesión $\{S_n\}$ de sus sumas parciales; b) si se reordenan los términos de la serie de manera arbitraria, tendremos que la suma de la serie no cambiará.
19. ¿Qué se llama medida: a) de un intervalo; b) de un conjunto abierto acotado? Demuéstrese la convergencia de la serie $\mu G = \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k)$, donde (α_k, β_k) son intervalos disjuntos dos a dos, con los cuales está formado el conjunto abierto acotado G.
20. ¿Qué se llama medida exterior del conjunto? ¿Acaso todo conjunto acotado tiene medida exterior?
21. Dése la definición de un conjunto medible y de su medida.
22. Utilizando la definición del conjunto medible, demuéstrese que el segmento $[a, b]$ es medible, además su medida $\mu [a, b] = b - a$ $(a < b)$.
23. Sea un conjunto medible $E \subset [a, b]$. Demuéstrese que el conjunto $\bar{E} = [a, b] \setminus E$ es medible, además $\mu\bar{E} = \mu [a, b] - \mu E$.
24. Demuéstrese que un conjunto acotado cerrado es medible.
25. ¿Qué es la aditividad numerable de la medida? Demuéstrese que la unión (si está acotada) de una cantidad numerable de conjuntos medibles es un conjunto medible.

III. Ejemplos de resolución de problema

1. Demostrar que el intervalo $(0, 1) = I$ y la recta numérica $\mathbf{R}$ son conjuntos equivalentes: $\mathbf{R} \sim I$.

△ Para demostrar la equivalencia de los conjuntos I y $\mathbf{R}$ hace falta establecer entre sus elementos la correspondencia biunívoca. Tal correspondencia la realiza la función

$$y = \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in I.$$

En realidad, a cada $x \in I$ esta función pone en correspondencia cierto $y \in \mathbf{R}$ y puesto que aquélla es continua y crece en I y,

además, $\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1-0}\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=+\infty$, entonces $\forall y\in\mathbf{R}$ existe el único $x\in I$ tal que $y=\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$. Esto significa precisamente que entre los elementos de los conjuntos I y $\mathbf{R}$ está establecida la correspondencia biunívoca. Así, pues, $\mathbf{R}\sim I$. ▲

2. Demostrar que el intervalo $(0, 1) = I$ y el segmento $[0, 1] = S$ son conjuntos equivalentes: $I \sim S$.

△ Sea Q el conjunto de todos los números racionales del segmento S. Este conjunto es numerable (véase el § 6, cap. II). Hagamos $\overline{Q} = S\setminus Q$. Entonces $S = Q + \overline{Q}$. Eliminemos del conjunto Q los puntos 0 y 1. Obtenemos el conjunto numerable Q_1 de números racionales del intervalo I. Es evidente que $I = Q_1 + \overline{Q}$. Puesto que Q y Q_1 son conjuntos numerables, resulta que $Q \sim Q_1$. De aquí se deduce que $Q + \overline{Q} \sim Q_1 + \overline{Q}$, es decir, $S \sim I$. ▲

OBSERVACIÓN. De los resultados de los ejemplos 1 y 2 se infiere que la recta numérica $\mathbf{R}$ (el conjunto de todos los números reales) tiene potencia de continuo.

3. Sea $E \subset [a, b]$ un conjunto abierto. Demostrar que $G = [a, b]\setminus E$ es un conjunto cerrado.

△ Hace falta demostrar que G contiene todos sus puntos límites. De la definición dada para la diferencia de conjuntos se desprende que $\forall x \in [a, b]$ o bien $x \in E$, o bien $x \in G$. Sea x un punto límite del conjunto G, es decir, en cualquier entorno del punto x hay puntos del conjunto G distintos de x. Es evidente que $x \in [a, b]$. Demostremos que $x \in G$. Supongamos lo contrario. Entonces $x \in E$ y, puesto que E es un conjunto abierto, existe un entorno del punto x que pertenece por completo a E. Por consiguiente, en este entorno del punto x no existe ningún punto del conjunto G, pero esto contradice a que x es un punto límite de G. Esta contradicción demuestra que $x \in G$ y, por consiguiente, G es un conjunto cerrado. ▲

4. Demostrar que el conjunto Q de todos los números racionales de un segmento arbitrario $[a, b]$ es medible, además $\mu Q = 0$.

△ El conjunto Q es numerable, por eso sus puntos pueden numerarse con ayuda de números naturales. Prefijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario y coloquemos el primer punto del conjunto Q en intervalo de longitud $\varepsilon/2$, el segundo, en intervalo de longitud $\varepsilon/2^2$, . . .; el n-ésimo, en intervalo de longitud $\varepsilon/2^n$, etc. La unión de estos intervalos es el conjunto abierto G, cuya medida es

$$\mu G < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

En virtud de que ε es arbitrariamente pequeño, de aquí se deduce que $\overline{\mu}Q = 0$. Puesto que $(G\setminus Q) \subset G$, entonces $\overline{\mu}\,(G\setminus Q) \leqslant \overline{\mu}G = \mu G < \varepsilon$. Esto significa según la definición que Q es medible,

además $\mu Q = \bar{\mu} Q = 0$. En este caso se dice que el conjunto Q tiene *medida nula*. ▲

5. Sea a un número arbitrario tal que $0 < a < 1$. Formemos dos conjuntos D y E con ayuda de una cantidad numerable de pasos de la manera siguiente. En el primer paso eliminemos del segmento $[0, 1]$ el intervalo E_1 de longitud $a/2$ situado simétricamente respecto al centro del segmento $[0, 1]$ (demos a semejante intervalo el nombre de intervalo medio). En el segundo paso de los dos segmentos iguales restantes, eliminemos los intervalos medios de longitud $a/8$ cada uno. Designemos la unión de estos intervalos por E_2; la longitud de E_2 es igual a $a/4$. En el tercer paso de los cuatro segmentos iguales restantes eliminemos los intervalos medios de longitud $a/32$ cada uno. Notemos la unión de estos cuatro intervalos por E_3; la longitud de E_3 será igual a $a/8$. En el cuarto paso de los ocho segmentos iguales restantes eliminemos los intervalos medios de longitud $a/128$ cada uno, etc. Sea

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad D = [0, 1] \setminus E.$$

Demostrar que:

a) E es un conjunto abierto y D, un conjunto cerrado;

b) $\mu E = a$, $\mu D = 1 - a$;

c) el conjunto D no contiene en forma completa ningún segmento;

d) el conjunto D no contiene puntos aislados;

e) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ un conjunto D' tal que $D \subset D'$ y $0 < \mu D' - \mu D < \varepsilon$;

f) el conjunto D no es numerable.

△ a) El conjunto E es abierto, puesto que es la unión de intervalos, o sea, de conjuntos abiertos; el conjunto D es cerrado, puesto que es un complemento de un conjunto abierto hasta formar un segmento

b) Puesto que los conjuntos E_k $(k = 1, 2, \ldots)$ son disjuntos entonces, en virtud de la aditividad σ de la medida

$$\mu E = \sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{2^k} = a.$$

Los conjuntos D y E son disjuntos, por eso

$$\mu D = \mu\,[0, 1] - \mu E = 1 - a.$$

c) Supongamos que el conjunto D contiene en forma completa cierto segmento de longitud l. Advirtamos que al formar el conjunto D después del n-ésimo paso de eliminación de los intervalos medios, la parte restante del segmento $[0, 1]$ consta de 2^n segmentos iguales disjuntos. Designemos la longitud de cada uno de éstos por d_n. Es evidente que $d_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Para cualquier n el conjunto D forma parte de la unión de los 2^n segmentos indicados. Por eso el segmento de longitud l, contenido por completo en D, debe hallarse enteramente en uno de los segmentos indicados de longitud

d_n, es decir, $l \leqslant d_n$. Pero esto contradice a que $d_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Así, pues, el conjunto D no contiene por entero ningún segmento.

d) Si el conjunto D contuviera algún punto aislado, de este hecho se deduciría que al construir D a partir del segmento $[0, 1]$ fueron eliminados dos intervalos adyacentes (separados por este punto). Sin embargo, cualesquiera dos intervalos eliminados quedan separados por un segmento y no por un punto.

e) Pongamos $D' = [0, 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k$. Es evidente que $D \subset D'$, además $D' \setminus D = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k$, $\mu D' - \mu D = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu E_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a}{2^k} = \frac{a}{2^n}$. De aquí se deduce que $\forall \varepsilon > 0\ \exists n$ tal que se cumple la desigualdad

$$0 < \mu D' - \mu D = \frac{a}{2^n} < \varepsilon.$$

f) El conjunto numerable tiene medida nula (véase el ejemplo 4). Puesto que $\mu D = 1 - a \neq 0$, tendremos que D es un conjunto innumerable. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

1. Demuéstrese la equivalencia de los siguientes conjuntos:

a) $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ y $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$;

b) de los segmentos $[0, 1]$ y $[a, b]$;

c) del intervalo (a, b) en la recta numérica $\mathbf{R}$.

2. Demuéstrese que:

a) un subconjunto infinito de un conjunto numerable también es numerable;

b) la unión de un número finito o de una cantidad numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable;

c) el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es numerable;

d) el conjunto de puntos de discontinuidad de una función monótona es finito o numerable.

3. Demuéstrese que el conjunto de todos los números reales del segmento $[0, 1]$ es innumerable.

4. Demuéstrese que:

a) si A es un conjunto infinito y B, un conjunto finito o numerable, entonces $A + B \sim A$;

b) si A es un conjunto infinito; B, un conjunto finito o numerable y $A \setminus B$, un conjunto infinito, resulta que $A \setminus B \sim A$;

c) el conjunto de todos los números irracionales del segmento $[0, 1]$ tiene la potencia de continuo;

d) cualquier conjunto infinito contiene una parte equivalente a todo el conjunto.

5. Demuéstrese que para cualesquiera conjuntos A, B, C:
a) $(A+B)C = AC + BC$; b) $A + A = A$; c) $AA = A$; d) $A + BC = (A+B)(A+C)$; e) $A = (A\setminus B) + AB$, en particular, $A = (A\setminus B) + B$, si $B \subset A$.

6. Sea $\forall k$: $A_k \subset E$, $\bar{A}_k = E\setminus A_k$ es el complemento de A_k hasta formar E (el número de conjuntos A_k es finito o numerable). Demuéstrese que $\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \bar{A}_k$.

7. Sea $E \subset (a, b)$ un conjunto cerrado. Demuéstrese que $G = (a, b)\setminus E$ es un conjunto abierto.

8. Demuéstrese que el conjunto $\bar{Q}$ de todos los números irracionales del segmento $[a, b]$ es medible y hállese su medida.

9. Sea E un conjunto acotado tal, que $\bar{\mu} E = 0$. Demuéstrese que E es medible, además $\mu E = 0$.

10. Demuéstrese que cualquier subconjunto del conjunto de medida nula tiene esta misma medida.

§ 2. Funciones medibles

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Definición de la función medible. Sea que la función $f(x)$ está definida en el conjunto medible E. Designemos con el símbolo $\{x \in E: f(x) \leqslant c\}$ el conjunto de todos aquellos valores del argumento x que pertenecen al conjunto E, para los cuales $f(x) \leqslant c$ (c es cierto número).

DEFINICIÓN. *La función $f(x)$ se llama* ***medible en el conjunto*** *E, si para cualquier número c el conjunto $\{x \in E: f(x) \leqslant c\}$ es medible.*

Teorema 2. *Para que la función $f(x)$ sea medible en el conjunto E es necesario y suficiente que para todo número c sea medible cualquiera de los conjuntos siguientes:* $\{x \in E: f(x) > c\}$, $\{x \in E: f(x) \geqslant c\}$, $\{x \in E: f(x) < c\}$.

2. Algunas propiedades de las funciones medibles.

1ª. Si una función $f(x)$ es medible en el conjunto E, será medible en cualquier subconjunto medible del conjunto E.

2ª. Si una función $f(x)$ es medible en los conjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, resulta que es medible en su unión $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y en la intersección $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$.

3ª. Si una función $f(x)$ está definida en un conjunto E de medida nula, tendremos que es medible en este conjunto.

4ª. Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son medibles en un conjunto E, quiere decir que las funciones $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)\,g(x)$ y $f(x)/g(x)$ (a condición de que $g(x) \neq 0$) también son medibles en el conjunto E.

5ª. Toda función continua en un segmento es medible en este segmento.

Se dice que cierta propiedad es válida *casi por todo* sobre el conjunto E, si el conjunto de los puntos de E, en que aquélla es falsa, tiene medida nula.

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas en el conjunto medible E se llaman *equivalentes* en este conjunto, si son iguales casi por todo en los puntos de éste.

La notación de la equivalencia es: $f(x) \approx g(x)$ en E.

Por ejemplo, la función de Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es un número irracional}, \\ 1, & \text{si } x \text{ es un número racional}; \end{cases} \quad x \in [a, b], \tag{1}$$

es equivalente en $[a, b]$ a la función continua $g(x) \equiv 0$, puesto que el conjunto de puntos x del segmento $[a, b]$, en los cuales $D(x) \neq g(x)$, es el conjunto Q de todos los números racionales del segmento $[a, b]$, cuya medida es $\mu Q = 0$. Cabe advertir que la función $D(x)$ es discontinua en todos los puntos de $[a, b]$.

Aduzcamos dos propiedades más de las funciones medibles.

6ª. Si $g(x)$ es medible en E, $f(x) \approx g(x)$ en E, entonces $f(x)$ es medible en E.

7ª. **Teorema 3** (TEOREMA DE LUZIN O PROPIEDAD C DE LAS FUNCIONES MEDIBLES). *Para que la función $f(x)$ sea medible en $[a, b]$, es necesario y suficiente que $\forall \varepsilon > 0$ exista una función $g(x)$ continua en $[a, b]$ tal que $\mu\{x \in [a, b]: f(x) \neq g(x)\} \leqslant \varepsilon$.*

El teorema de Luzin significa que toda función medible en $[a, b]$, puede hacerse continua mediante su cambio en un conjunto de medida tan pequeña como se quiera, es decir, las funciones medibles en este sentido son próximas a las funciones continuas.

II. Preguntas y tareas de control

1. Dése la definición de función medible.
2. Valiéndose de la definición, demuéstrese que las siguientes funciones son medibles:
   a) $f(x) = c = \text{const}$, $x \in [a, b]$;
   b) $f(x) = x$, $x \in [a, b]$;
   c) $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ para } 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ 1 \text{ para } 1/2 < x \leqslant 1. \end{cases}$
3. Enúnciese el teorema que expresa la condición necesaria y suficiente para que una función sea medible en el conjunto E.
4. Enúnciense las propiedades 1ª — 5ª de las funciones medibles. Demuéstrense las propiedades 1ª — 3ª.
5. ¿Cuándo se dice que cierta propiedad es válida casi por todo sobre el conjunto E?
6. ¿Qué funciones se llaman equivalentes en el conjunto E? Demuéstrese que la función de Dirichlet es equivalente en $[a, b]$ a una función continua. ¿A qué es igual la medida del conjunto de puntos de discontinuidad de la función de Dirichlet en $[a, b]$?
7. Enúnciese y demuéstrese la 6ª propiedad de las funciones medibles.

8. Utilizando las propiedades 5ª y 6ª, demuéstrese que si una función $f(x)$ es equivalente en $[a, b]$ a una función continua, entonces $f(x)$ es medible en $[a, b]$.
9. Enúnciese el teorema de Luzin. Ilústrese este teorema en el ejemplo de la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ 1 & \text{para } 1/2 < x \leqslant 1. \end{cases}$

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. Demostrar que la función de Dirichlet $D(x)$ [véase la fórmula (1)] es medible en $[a, b]$.

△ Ateniéndose a la definición de la función medible es necesario demostrar que $\forall c$ el conjunto $\{x \in [a, b]: f(x) \leqslant c\} \equiv E_c$ es medible. Examinemos tres casos.

Si $c \geqslant 1$, tendremos que $E_c = [a, b]$ es un conjunto medible.

Si $0 \leqslant c < 1$, entonces $E_c = \overline{Q}$, donde $\overline{Q}$, que es el conjunto de todos los números irracionales de $[a, b]$, resulta ser un conjunto medible.

Si $c < 0$, esto significa que $E_c = \varnothing$, donde $\varnothing$ es un conjunto vacío. El conjunto vacío se considera medible: $\mu\varnothing = 0$.

Así, pues, $D(x)$ es una función medible. ▲

2. Demostrar la 5ª propiedad: una función $f(x)$ continua en $[a, b]$ es medible en $[a, b]$.

△ Demostremos que $\forall c$ el conjunto $\{x \in [a, b]: f(x) \leqslant c\} \equiv E_c$ es medible. Si $E_c = \varnothing$, entonces E_c es medible: $\mu E_c = \mu\varnothing = 0$. Sea que E_c no es vacío. Demostremos que E_c es un conjunto cerrado. De aquí se deducirá que E_c es medible. Sea x_0 el punto límite del conjunto E_c. Hace falta demostrar que $x_0 \in E_c$. Está claro que $x_0 \in [a, b]$. Según la definición del punto límite, $\exists\{x_n\} \to x_0$, además $\forall n\ x_n \in E_c$. De la continuidad de $f(x)$ en el punto x_0 se infiere que $\{f(x_n)\} \to f(x_0)$ y, puesto que $x_n \in E_c$, tendremos que $f(x_n) \leqslant c$. Por consiguiente, $f(x_0) \leqslant c$, es decir, $x_0 \in E_c$, lo que se trataba de demostrar. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

11. Demuéstrese el teorema que expresa la condición necesaria y suficiente para que una función sea medible en el conjunto E.

12. Sea $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \in E, \\ 1 & \text{para } x \in D = [0, 1] \setminus E, \end{cases}$ donde E y D son los conjuntos del ejemplo 5 del § 1. Demuéstrese que:

a) $f(x)$ es una función medible en $[0, 1]$;

b) D es el conjunto de todos los puntos de discontinuidad de $f(x)$;

c) $\forall \varepsilon > 0$ existe una función continua $g(x)$ en $[0, 1]$ tal que $\mu\{x \in [0, 1]: f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$.

13. Demuéstrese que la función $\varphi(x) = x$, $x \in D$, donde D es el conjunto del ejer. 12, es medible en el conjunto D.

14. Valiéndose del teorema de Luzin, demuéstrese que la suma, la diferencia y el producto de las funciones medibles en $[a, b]$ son funciones medibles en $[a, b]$.

§ 3. Integral de Lebesgue

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Definición de la integral de Lebesgue de una función acotada. Sea E un conjunto medible arbitrario. Llamemos *partición* del conjunto E a cualquier familia de partes $T = \{E_k\}$ de un número finito de conjuntos medibles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ tal que $\bigcup_{k=1}^{n} E_k = E$; $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \neq j)$.

Supongamos que en el conjunto E está definida una función acotada $f(x)$. Para una partición arbitraria $T = \{E_k\}$ hagamos $M_k = \sup_{E_k} f(x)$, $m_k \inf_{E_k} f(x)$ y anotemos dos sumas:

$$S_T = \sum_{k=1}^{n} M_k \mu E_k, \quad s_T = \sum_{k=1}^{n} m_k \mu E_k.$$

Los números S_T y s_T se llaman *sumas superior* e *inferior* de la partición T. Es evidente, $\forall T\ s_T \leqslant S_T$.

Examinemos los conjuntos numéricos $\{s_T\}$ y $\{S_T\}$ de las sumas inferiores y superiores de todo género. Éstas están acotadas inferiormente por el número $m\mu E$ y superiormente, por el número $M\mu E$, donde $m = \inf_E f(x)$, $M = \sup_E f(x)$ y, por lo tanto, tienen cotas exactas. Los números $\underline{I} = \sup \{s_T\}$ e $\overline{I} = \inf \{S_T\}$ se llaman *integrales inferior* y *superior de Lebesgue.*

DEFINICIÓN. *Una función $f(x)$ acotada en un conjunto medible E se llama **integrable según Lebesgue** en este conjunto, si $\underline{I} = \overline{I}$.*

Además el número $\underline{I} = \overline{I}$ se llama *integral de Lebesgue* de la función $f(x)$ sobre el conjunto E y se designa con el símbolo $\int_E f(x)\, d\mu(x)$.

2. Relación entre las integrales de Riemann y de Lebesgue.

Teorema 4. *Cada función integrable según Riemann en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$ en el sentido de Lebesgue, además las integrales de Riemann y de Lebesgue de semejante función son iguales.*

OBSERVACIÓN. La afirmación inversa no es justa (véase el ejemplo en el p. III).

3. Clase de las funciones acotadas integrables según Lebesgue.

Teorema 5. *Para que una función $f(x)$ acotada en un conjunto medible E sea integrable según Lebesgue en este conjunto, es necesario y suficiente que $f(x)$ sea medible en E.*

4. Integral de Lebesgue como límite de sus sumas integrables. Sea $f(x)$ una función medible acotada en un conjunto E, $m = \inf_E f(x)$, $M = \sup_E f(x)$ y sean $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ números arbitrarios tales que $m = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = M$.

Se llama *partición del conjunto E según Lebesgue* la partición $T = \{E_k\}$, donde $E_1 = \{x \in E: y_0 \leqslant f(x) \leqslant y_1\}$, $E_k = \{x \in E: y_{k-1} < f(x) \leqslant y_k\}$, $k = 2, 3, \ldots, n$.

Sea ξ_k un punto arbitrario de E_k ($k = 1, 2, \ldots, n$). El número $I(E_k, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\mu E_k$ se llama *suma integral de Labesgue* (si algún $E_k = \varnothing$, quiere decir que E_k no contiene ningún punto de ξ_k y el correspondiente sumando en la suma se considera nulo).

Hagamos $\delta = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \delta_k$, donde $\delta_k = y_k - y_{k-1}$.

Teorema 6. *El límite de las sumas integrales de Lebesgue cuando* $\delta \to 0$ *es igual a la integral de Lebesgue, es decir,* $\lim_{\delta \to 0} I(E_k, \xi_k) = \int_E f(x)\,d\mu(x)$.

De este teorema se deduce que la integral de Lebesgue puede determinarse como el límite de las sumas integrales de Lebesgue cuando $\delta \to 0$. Esta definición de la integral de Lebesgue es análoga a la definición de la integral de Riemann, con la diferencia de que, al componer las sumas integrales, se divide en segmentos parciales no el campo de definición, sino que el conjunto de valores de la función.

5. Propiedades de la integral de Lebesgue.

1ª. $\int_E d\mu(x) = \mu E$.

2ª. LINEALIDAD DE LA INTEGRAL. Si $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en E, mientras que α y β son números arbitrarios, tendremos que la función $\alpha f(x) + \beta g(x)$ es integrable en E, además

$$\int_E [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,d\mu(x) = \alpha \int_E f(x)\,d\mu(x) + \beta \int_E g(x)\,d\mu(x).$$

3ª. ADITIVIDAD DE LA INTEGRAL. Si $f(x)$ es integrable en E_1 y E_2, además $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, entonces $f(x)$ es integrable en $E_1 \cup E_2$ y se cumple la igualdad

$$\int_{E_1 \cup E_2} f(x)\,d\mu(x) = \int_{E_1} f(x)\,d\mu(x) + \int_{E_2} f(x)\,d\mu(x).$$

4ª. Si $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en E, además $f(x) \geqslant g(x)$ $\forall x \in E$, resulta que

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) \geqslant \int_E g(x)\,d\mu(x).$$

II. Preguntas y tareas de control

1. ¿Qué se llama partición de un conjunto medible E?
2. ¿Qué se entiende por sumas superior e inferior de la partición?
3. Demuéstrese que si la partición T_2 se ha obtenido de la partición $T_1 = \{E_k\}$ con ayuda de particiones de algunos E_k (es decir, desmenuzando T_1), entonces $s_{T_1} \leqslant s_{T_2}$, $S_{T_1} \geqslant S_{T_2}$.
4. Demuéstrese que $s_{T_1} \leqslant S_{T_2}$, $s_{T_2} \leqslant S_{T_1}$ para cualesquiera particiones de T_1 y T_2.
5. ¿Qué son las integrales superior e inferior de Lebesgue? Demuéstrese que $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.
6. Dénse las definiciones de la función integrable según Lebesgue y de la integral de Lebesgue.
7. ¿Qué relación existe entre las integrales de Lebesgue y de Riemann?
8. ¿Qué representa en sí la clase de las funciones acotadas integrables según Lebesgue?
9. ¿Qué es la partición de Lebesgue?
10. ¿Qué se llama suma integral de Lebesgue?
11. ¿Se puede definir la integral de Lebesgue como el límite de las sumas integrales de Lebesgue? ¿En qué consiste la generalidad y la diferencia de esta definición de la integral de Lebesgue en comparación con la definición de la integral de Riemann?
12. Enumérense las propiedades de la integral de Lebesgue.

III. Ejemplos de resolución de problemas

Demostrar que la función de Dirichlet $D(x)$ (véase la fórmula (1) § 2) es integrable según Lebesgue en $[a, b]$ y hallar $\int\limits_{[a,b]} D(x)\, d\mu(x)$.

△ I PROCEDIMIENTO. Puesto que $D(x) \geqslant 0$, para cualquier partición T tenemos $s_T \geqslant 0$, $S_T \geqslant 0$. Examinemos la partición T^* del segmento $[a, b]$ en un conjunto Q de números racionales y el conjunto $\overline{Q}$ de números irracionales. Para esta partición

$$S_{T^*} = \sup_Q D(x)\, \mu Q + \sup_{\overline{Q}} D(x)\, \mu\overline{Q} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (b - a) = 0.$$

De esta manera el conjunto $\{S_T\}$ contiene el 0. Por eso $\overline{I} = \inf\{S_T\} = 0$.

Puesto que todos $s_T \geqslant 0$, tendremos que $\underline{I} = \sup\{s_T\} \geqslant 0$, y, por cuanto $\underline{I} \leqslant \overline{I}$, obtenemos $\underline{I} = 0$.

Así, pues, $\underline{I} = \overline{I} = 0$. De aquí se infiere que la función $D(x)$ es integrable según Lebesgue en $[a, b]$, además $\int\limits_{[a,b]} D(x)\, d\mu(x) = 0$.

II PROCEDIMIENTO. Para cualquier partición de Lebesgue $T = \{E_k\}$ tenemos: $\mu E_1 = \mu\{x \in [a, b]\colon 0 \leqslant D(x) \leqslant y_1 < 1\} = \mu\overline{Q} = b - a$, $f(\xi_1) = 0\ \forall\ \xi_1 \in E_1$; $\mu E_2 = \mu E_3 = \ldots = \mu E_{n-1} = \mu\varnothing = 0$; $\mu E_n = \mu\{x \in [a, b]\colon 0 < y_{n-1} < D(x) \leqslant 1\} = \mu Q =$

$= 0$, $f(\xi_n) = 1\ \forall\ \xi_n \in E_n$. Por eso $I(E_k, \xi_k) = f(\xi_1)\,\mu\bar{Q} + f(\xi_n)\,\mu Q = 0$, es decir, cualquier suma integral de Lebesgue es nula. Por consiguiente, $\lim_{\delta \to 0} I(E_k, \xi_k) = 0$, o sea, la función $D(x)$ es integrable en $[a, b]$, además $\int_{[a,b]} D(x)\,d\mu(x) = 0$. ▲

OBSERVACIÓN. Es sabido que la función $D(x)$ no es integrable según Riemann en $[a, b]$. De esta manera, una función integrable en el sentido de Lebesgue puede no ser integrable según Riemann.

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

15. Sea $f(x)$ una función del ejer. 12. Demuéstrese que $f(x)$ es integrable en el sentido de Lebesgue, pero no es integrable según Riemann en $[0, 1]$.

16. Anótense para la función $f(x)$ del ejer. 15 las sumas integrales de Lebesgue y calcúlese $\int_{[0,1]} f(x)\,d\mu(x)$.

17. Demuéstrese que la función $\varphi(x)$ del ejer. 13 es integrable según Lebesgue en el conjunto D, y calcúlese $\int_D \varphi(x)\,d\mu(x)$.

18. Demuéstrese que si una función $f(x) = 0$ casi por todo el conjunto medible E, tendremos que ésta es integrable, además $\int_E f(x)\,d\mu(x) = 0$.

19. Demuéstrese que si las funciones acotadas $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes en el conjunto E y la función $f(x)$ es integrable en E, entonces la función $g(x)$ también será integrable en E, con la particularidad de que $\int_E g(x)\,d\mu(x) = \int_E f(x)\,d\mu(x)$.

20. Demuéstrese que cada función integrable según Riemann en $[a, b]$, es integrable en $[a, b]$ en el sentido de Lebesgue, además las integrales de Riemann y de Lebesgue de semejante función son iguales.

21. Demuéstrese la suficiencia en el teorema 5, es decir, demuéstrese que una función acotada medible en un conjunto E es integrable según Lebesgue en este conjunto.

22. Demuéstrese que tiene lugar el criterio siguiente de integrabilidad de las funciones en el sentido de Lebesgue (que es análogo al criterio de integrabilidad según Riemann): para que una función acotada en un conjunto medible E sea integrable según Lebesgue, en este conjunto es necesario y suficiente que $\forall \varepsilon > 0$ exista tal partición T de Lebesgue del conjunto E, para la cual es válida la desigualdad $S_T - s_T < \varepsilon$.

23. Demuéstrese que si una función $f(x)$ está acotada y es medible en un conjunto E, entonces el límite de sus sumas integrales de Lebesgue cuando $\delta \to 0$ $[\delta = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (y_k - y_{k-1})]$ es igual a la integral de Lebesgue de la función $f(x)$ en el conjunto E.

Respuestas e indicaciones

Capítulo I

1. ● Recúrrase al método de demostración por el absurdo. **4.** Supongamos lo contrario: sea la fracción del tipo $a_0, a_1a_2 \ldots a_k$ (9) el resultado de división de un número natural m por otro número natural n. Entonces $\forall p \in \mathbb{N}$, $p > k$, el número m/n ha de satisfacer las desigualdades

$$a_0, \underbrace{a_1 \ldots a_k 99 \ldots 9}_{p \text{ signos}} < \frac{m}{n} < a_0, a_1 \ldots a_k + \frac{1}{10^k}.$$

Por consiguiente,

$$0 < a_0, a_1 \ldots a_k + \frac{1}{10^k} - \frac{m}{n} < a_0, a_1 \ldots a_k + \\ + \frac{1}{10^k} - a_0, \underbrace{a_1 \ldots a_k 99 \ldots 9}_{p \text{ signos}} = \frac{1}{10^p},$$

lo que es imposible (explíquese, por qué). La contradicción obtenida demuestra la afirmación inicial. **5.** ● Aprovéchense los resultados de los ejemplos 1 y 2. **15.** Sea x un número positivo cualquiera y sean x_1 e y_1 cualesquiera números racionales que satisfacen las desigualdades

$$0 < x_1 \leqslant x, \quad 0 < y_1 \leqslant 1. \tag{*}$$

Por lo tanto según la definición del producto de números positivos tenemos $x \cdot 1 = \sup M$, donde $M = \{(x_1y_1)_r\}$. Como se infiere de (*), $\forall x_1, y_1 0 < (x_1y_1)_r \leqslant x_1 \leqslant x$, es decir, x es la cota superior del conjunto M. Sea $\tilde{x} < x$. Como se ha mostrado en el ejemplo 1 del § 1, existe un número racional x^* tal, que $\tilde{x} < x^* < x$. Tomemos $x_1 = x^*$, $y_1 = 1$. Entonces $(x_1y_1)_r = x^* \cdot 1 = x^*$ y, por consiguiente, $(x_1y_1)_r > \tilde{x}$. Así, pues, para el número x vienen cumplidas ambas condiciones de definición de la cota superior exacta de un conjunto, es decir, $\sup M = x$. De esta manera, $\forall x > 0$: $x \cdot 1 = \sup M = x$, de donde $x \cdot 1 = x$. Si $x = 0$, tendremos que según la regla de multiplicación de los números racionales $0 \cdot 1 = 0$. Si $x < 0$, resulta que en correspondencia con la definición del producto de los números reales $x \cdot 1 = -|x| \cdot 1$. Pero como acabamos de mostrar, $|x| \cdot 1 = |x|$, es decir, $x \cdot 1 = -|x| = x$. **33.** ● Para $x_1x_2 \ldots x_n = 0$ la afirmación es evidente. Para $x_1x_2 \ldots x_n \neq 0$ hágase $y_k = x_k/\sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ y utilícese el resultado del ejemplo 2 § 4.

Capítulo II

1. a) Sí; b) no; c) no; d) sí; e) no. **4.** No. **5.** ● Es suficiente demostrar que la sucesión $\{x_n\}$ no está acotada. **14.** ● Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, entonces $\exists A > 0$ y el número N tales que $x_n > A$ $\forall n > N$. Entre $x_1, x_2, \ldots, x_N$ existe un

número mínimo. 15. a) $x_4 = x_5 = -120$; b) $x_{10} = 20$. 20. a) Converge, si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \leqslant \beta$ o bien $\alpha \leqslant 0$, para todo β; b) converge, si $\gamma \leqslant 3/2$. 21. a) 0; b) 0; c) 1/3.

23. a) 1/2; b) 1/3; c) 1. ● Represéntese la fracción $\frac{1}{k(k+1)}$ en forma de $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$; d) 1/4. ● Represéntese $S_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ en forma de $S_n = A + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$ $\forall n$. 27. Puesto que $\forall \varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1/\varepsilon)^n}{n!} = 0$, tendremos pue $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ tal que $\forall n > N$ se cumple la desigualdad $(1/\varepsilon)^n/n! < 1$ ó $1/\sqrt[n]{n!} < \varepsilon$. 29. $(1+\sqrt{1+4a})/2$. 30. a) $(a+2b)/3$; b) $\sqrt{a}$; c) $-\sqrt{a}$. 33. ● d) Demuéstrese que: 1°) el conjunto U de los puntos límites de la sucesión está acotado; 2°) si $\inf U = c$, $\sup U = b$: entonces $c, b \in U$; 3°) $c = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. 35. a) Los puntos límites son, $2, -2$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 2$; $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -2$; b) los puntos límites son: 0, 1, 2; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; c) los puntos límites son: -4, 0, 2, 6; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 6$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -4$; d) los puntos son: $-1/2$, 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1/2$; e) el punto límite es 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; f) los puntos límites son: 0, 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; g) los puntos límites son: $-e - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $-e + \frac{1}{\sqrt{2}}$, $e-1$, $e+1$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = e+1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -e - \frac{1}{\sqrt{2}}$; h) los puntos límites son: 0, 1/2, 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; i) los puntos límites son: 1, 2; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ k) los puntos límites son: 0, 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; l) no existen puntos límites; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. 36. Diverge. ● Demuéstrese que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} \neq \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1}$. 37. ● a) Utilícese la estimación de $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ para $k \geqslant 2$; d) hágase uso de la estimación de $|x_{n+p} - x_n| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k q^k \right| \leqslant M \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |q|^k$. 38. ● En la definición de la 1ª sucesión fundamental hágase $p=1$. 39. ● b) Demuéstrese que para $\varepsilon = 1/2$ y $\forall n$ $|x_n - x_{2n}| \geqslant 1/2$.

Capítulo III

2. ● Demuéstrese que $f(x)$ no satisface la definición del límite de la función según Heine. 3. No. 4. ● Para demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ para $|a| \neq 1$ no existe, aprovéchese la negación de la definición para el límite de una función según Heine. 8. a) 1; b) 4/5; c) $-1/2$; d) 1; e) m. 9. a) 4/3; b) -2; c) 1/4. 10. a) 1; b) $5^{10}/3^{25}$; c) 1; d) $1/\sqrt[3]{2}$. 12. a) No; b) 1/2; c) 1. 15. a) $x = 0$ es un punto de discontinuidad evitable; b) $x = 0$ es un punto de discontinuidad

de II especie; c) $x = k$ ($k \in \mathbf{Z}$) son puntos de discontinuidad de I especie; d) en los puntos $x = 1$ y $x = -1$ la función es continua, los demás puntos son puntos de discontinuidad de II especie; e) $x = -1$ es un punto de discontinuidad de II especie; f) $x = 0$ es un punto de discontinuidad de I especie; *g*) $x = 1$ es un punto de discontinuidad de I especie; h) $x = -1$ y $x = 3$ son puntos de discontinuidad de II especie; i) $x = 1$ es un punto de discontinuidad evitable; k) $x = -1$ es un punto de discontinuidad de I especie; l) $x = -1$ es un punto de discontinuidad de I especie. **17.** a) $a^x = 1 + x \ln a + o(x)$; b) $e^x = 1 + x + o(x)$; c) $(1 + x)^a = 1 + ax + o(x)$; d) $\operatorname{sh} x = x + o(x)$; e) $\operatorname{th} x = x + o(x)$; f) $\operatorname{ch} x = 1 + (1/2)\, x^2 + o(x^2)$. **19.** a) No; b) sí; c) sí. **20.** a) La igualdad $o(x+x^2) = o(x^2)$ para $x \to 0$ no es cierta. En efecto, por ejemplo, la función $\alpha(x) = x\sqrt[3]{x}$ es una infinitésima de orden superior que $x + x^2$ para $x \to 0$ $\left(\text{puesto que } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt[3]{x}}{x+x^2} = 0\right)$, pero $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sqrt[3]{x}}{x^2} = \infty$, es decir, $x\sqrt[3]{x} \neq o(x^2)$ para $x \to 0$; b) no; c) sí; d) no; e) sí. **23.** a) $25x + o(x)$, $25x + o(x)$; b) $1 - 8x^4 + o(x^4)$, $1 - (1/2)\, x^2 + o(x^2)$; c) $1 + 2x + o(x)$; $1 + \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$; d) $-x^2 + o(x^2)$; $x + o(x)$; e) $(1/27)\, x + o(x)$, $-(1/27)\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$; f) $1 + x^3 \ln 2 + o(x^3)$, $1 + x^2 \ln 2 + o(x^2)$; g) $-2x^2 + o(x^2)$, $-2x^3 + o(x^3)$; h) $1 - (1/2)\, x + o(x)$, $1 + (1/2)\, x + o(x)$; i) $\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$; k) $1 + (x + 1/2)\, |x|) \ln 5 + o(x)$; l) $1 - (1/6)\, x + o(x)$; m) $-(1/2)\, x^2 + o(x^2)$. **24.** a) $(x-2)^2 + o((x-2)^2)$; b) $1 + \beta(2-x) + o(2-x)$; c) $x - 2 + o(x-2)$; d) $1 - (1/2)\, \pi^2 (x-2)^2 + o((x-2)^2)$; e) $\pi (x^2 - 4) + o(x-2)$; f) $(2/35)(x-2) + o(x-2)$; g) $4(1 + \ln x)(x-2) + o(x-2)$. **25.** a) $1/2 + o(1)$; b) $1/(3x) + o(1/x)$; c) $5/2 + o(1)$; d) $1/\sqrt[3]{x^2} + o(1/\sqrt[3]{x^2})$; $1/\sqrt[3]{x^2} + o(1/\sqrt[3]{x^2})$; e) $1 - 1/(2x^2) + o(1/x^2)$; f) $1 + (\ln 5)/x + o(1/x)$; g) $-4/x^2 + o(1/x^2)$, $4/x^2 + o(1/x^2)$; h) $1/\sqrt{x} + o(1/\sqrt{x})$. **26.** a) $1/3 + o(1)$; b) $(1/n) \ln 14 + o(1/n)$; c) $1/\sqrt{n} + o(1/\sqrt{n})$. **27.** a) 4; b) $1/\sqrt{3}$; c) $2/\pi$; d) $\alpha/m - \beta/n$; e) 1; f) $-1/12$ g) $1/a$; h) $1/2$, $\sqrt{2/3}$, 1; i) 0; k) 0, si $a < b$; $+\infty$, si $a > b$; $e^{-1/b}$, si $a = b$ l) 1; m) 1; n) $\sqrt[a]{b}$. **28.** a) $\alpha/m + \beta/n$; b) $-19/3$; c) $1/324$; d) $-4/9$; e) 3; f) $\ln a$; g) e^{π^2}; h) 0; i) 0; k) 0; l) $e^{-x^2/2}$; m) e^{-1}. **29.** a) -2; b) $a^a \ln(ea)$; c) $2a/b$; d) $a^x \ln^2 a$; e) -2; f) e^2; g) $-\pi^2/4$; h) e^{1-a}; i) 0; k) $\ln 2$. **30.** a) 2; b) $4/3$; c) $7/4$; d) $-\ln 2$; e) $a^a \ln(a/e)$; f) $\ln a$; g) 2; h) $45/91$; i) $e^{-\pi^2 a^2}$; k) $e^{2\alpha}$; l) e; m) $1/2$; n) $1/2$.

Capítulo IV

1. a) $\Delta y = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{2} + \Delta x\right) - \dfrac{\pi}{6}$, $-\dfrac{3}{2} \leqslant \Delta x \leqslant \dfrac{1}{2}$; c) $\Delta y = \ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$, $-2 < \Delta x < +\infty$. **2.** a) 1; b) $2x_0$; c) $y'(4) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{4+\Delta x} - \sqrt{4}}{\Delta x} = \dfrac{1}{4}$; d) 0; e) $1/2$. **3.** a) $v_1 > v_2$ para $0 \leqslant t < 1/2$, $v_1 = v_2$ para $t = 1/2$, $v_1 < v_2$ para $t > 1/2$; en $[0, 1]$ $v_{1\,\text{med}} = v_{2\,\text{med}} = 1$, en $[1, 2]$ $v_{1\,\text{med}} = 1 < 3 = v_{2\,\text{med}}$; b) $v_1 = v_2 = 0$ para $t = 0$, $v_1 > v_2$ para $0 < t < 2/3$, $v_1 = v_2 = 4/3$ para $t = 2/3$, $v_1 < v_2$ para $t > 2/3$; en $[0, 1]$ $v_{1\,\text{med}} = v_{2\,\text{med}} = 1$, en $[1, 2]$ $v_{1\,\text{med}} = 3 < 7 = v_{2\,\text{med}}$; c) $v_1 > v_2$ para $1 \leqslant t < 4$, $v_1 = v_2 = 1/4$ para $t = 4$, $v_1 < v_2$ para $t > 4$; en $[1, 4]$ $v_{1\,\text{med}} = (1/3) \ln 4 > 1/3 =$

$=v_{2\,\text{med}}$, en $[1, 25]$ $v_{1\,\text{med}}=(1/24)\ln 25<1/6=v_{2\,\text{med}}$. **4.** a) $y=x$; b) $y=2x-1$; c) $x=0$; d) $y=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **5.** a) $\left(\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3},\ \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$; b) $\left(\frac{1}{e-1},\ \frac{e}{e-1}\right)$; c) $\left(\frac{6-\sqrt{3}\pi}{6(2-\sqrt{3})},\ \frac{6-\sqrt{3}\pi}{6(2-\sqrt{3})}\right)$. **6.** $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{4}x+1$. **7.** a) $f'(+0)=1$, $f'(-0)=-1$; b) $f'(1+0)=f'(1-0)=f'(1)=1$; c) $f'(+0)=f'(-0)=f'(0)=0$; d) $f'(+0)=1$, $f'(-0)=-1$; e) $f'(+0)=f'(-0)=f'(0)=0$; f) $f'(\pi/2+0)=f'(\pi/2-0)=f'(\pi/2)=0$; g) $f'(1+0)=e$, $f'(1-0)=-e$. **8.** a) $2x$; b) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$; c) $-\frac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$; d) $\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{3}{2x\sqrt{x}}$ $(x>0)$; e) $\frac{1}{x}\frac{\ln 108}{\ln 2\ln 3}$ $(x>0)$, $y'(1)=\frac{\ln 108}{\ln 2\ln 3}$; f) $\left(2^x-\frac{1}{2^x}\right)\ln 2$; g) $\cos x+\operatorname{sen} x$, $y'(0)=1$, $y'(\pi/4)=\sqrt{2}$; h) $1/(\operatorname{sen}^2 x\times\cos^2 x)$ $(x\neq \pi n/2,\ n\in\mathbf{Z})$; i) 0 ($\operatorname{arcsen} x+\arccos x=\pi/2=\text{const}$); k) 0 ($\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\pi/2=\text{const}$). **9.** ● Represéntese $[u(x)]^{v(x)}$ en forma de $e^{v(x)\ln u(x)}$ y utilícese la fórmula para la derivada de la función compuesta.

10. a) $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$; $\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(x<-a,\ x>a)$; $\frac{5x^2+3}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$; b) $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$ $(x>0)$, $-\operatorname{sen} x\times\operatorname{sen}(2\cos x)-\cos x\operatorname{sen}(2\operatorname{sen} x)$; c) $\cos[\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)]\cos(\operatorname{sen} x)\cos x$; $\frac{4\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x)}{(1-\operatorname{tg}^2 x)^2}$ $\left(x\neq\frac{\pi n}{4},\ n\in\mathbf{Z}\right)$; $2^{\cos x+\operatorname{tg} x}\ln 2\left(-\operatorname{sen} x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$ $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n;\ n\in\mathbf{Z}\right)$; d) $e^x(\operatorname{sen} x+\cos x)$; $2e^{x^2}(x\cos 2x-\operatorname{sen} 2x)$; $e^x\left[e^{e^x}+x^{e^x}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)\right]$ $(x>0)$; e) $x^x(\ln x+1)$ $(x>0)$; $\frac{1}{x\ln x[\ln(\ln x)]}$ $(x>e)$; $\frac{1}{x^2-a^2}$ $(x<-a,\ x>a)$; f) $\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$; $\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$; $\operatorname{ctg} x$ $(2\pi n<x<\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z})$; g) $\frac{1}{x}\cos(\ln x)$ $(x>0)$; $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(-a<x<a)$; $\frac{1}{x^2+a^2}$; h) $\frac{1}{1+x^2}$ $(x\neq 1)$; $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}-\operatorname{arctg} x=\begin{cases}\pi/4 & \text{para } x<1,\\ -3\pi/4 & \text{para } x>1;\end{cases}$ i) $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ $(x<-1,\ x>1)$; $\operatorname{sgn}\cos x$ $\left(x\neq\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbf{Z}\right)$; 1 $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\right)$; k) 1 $(-1<x<1)$; 1; l) $\frac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)}$ $(x>-a)$; $\sqrt{a^2-x^2}$ $(-a<x<a)$; m) $-\frac{\arccos x}{x^2}$ $(0<|x|<1)$; $\frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$ $(x>1)$; n) $\frac{x\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ $(-1<x<1)$; $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$; o) $\frac{1}{2(1+x^2)}$; $(\operatorname{sen} x)^{\cos x-1}\times(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\ln\operatorname{sen} x)$ $(2\pi n<x<\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z})$; $\frac{\operatorname{ch}(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}$ $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+\right.$

$+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\Big)$; $-\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{ch}^2(\cos x)}$; p) $\operatorname{cth} x\ (x>0)$; $\operatorname{th} x/\ln 10$; $1/\operatorname{ch} 2x$; $-1/\operatorname{sh} x\ (x>0)$. **11.** a) $\dfrac{\varphi\varphi'+\psi\psi'}{\sqrt{\varphi^2+\psi^2}}\ (\varphi^2+\psi^2\neq 0)$; b) $\dfrac{\psi'\varphi\ln\varphi-\varphi'\psi\ln\psi}{\varphi\psi\ln^2\varphi}$;
c) $2xf'(x^2)-\dfrac{2}{x^3}f'(x^{-2})\ (x\neq 0)$; d) $f'(f(x))f'(x)$. **14.** a) No, $(uv')|_{x=0}=0$;
b) sí, $(uv)'|_{x=1}=1/2$; c) sí, $(uv)'|_{x=1}=\cos 1$; d) no, $(uv)'|_{x=0}=0$; e) no, $(uv)'|_{x=0}=0$. **15.** I. a) Sí; b) no. II. a) No; b) no. **16.** No. **17.** ● Examínese $(x+x^2+\ldots+x^n)'$. **18.** a) $-\infty<t<\infty$, $f'(x)=2t/1|_{t=x}=2x$, $f(x)=$ $=x^2\ (-\infty<x<\infty)$; b) $0\leqslant t\leqslant\pi/2$, $f'(x)=(\operatorname{sen}^2 t)'/(\cos^2 t)'\Big|_{t=\arccos\sqrt{x},\ t\neq 0,\ t\neq\pi/2}=$
$=-1\ (0<x<1)$, $f(x)=1-x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$; c) $0\leqslant t\leqslant\pi$, $f'(x)=$
$=\dfrac{b\cos t}{-a\operatorname{sen} t}\Big|_{t=\arccos(x/a),\ t\neq 0,\ t\neq\pi}=-\dfrac{b}{a}\dfrac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\Big|_{\cos t=x/a,\ t\neq 0,\ t\neq\pi}=-\dfrac{b}{a}\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\times$
$\times(-a<x<a)$, $f(x)=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ (-a\leqslant x\leqslant a)$, la tangente: $x=a$, la normal: $y=0$; d) $0\leqslant t<\infty$, $f'(x)=\dfrac{b\operatorname{ch} t}{a\operatorname{sh} t}\Big|_{0<t<\infty}=\dfrac{b}{a}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\ (x>a)$,
$f(x)=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ (x\geqslant a)$; la tangente: $x=a$, la normal: $y=0$; f) $-\infty<t<$ $<\infty$, $f'(x)=\dfrac{2e^{2t}}{e^t}\Big|_{t=\ln x}=2x$, $f(x)=x^2\ (0<x<\infty)$. **22.** a) $|\mathbf{v}|=\sqrt{18}$,
$\cos X=\cos Y=1/\sqrt{18}$, $\cos Z=4/\sqrt{18}$; b) $|\mathbf{v}|=\sqrt{R^2+h^2}$, $\cos X=$ $=-R/\sqrt{R^2+h^2}$, $\cos Y=0$, $\cos Z=h/\sqrt{R^2+h^2}$; c) $|\mathbf{V}|=\sqrt{14}$, $\cos X=$ $=1/\sqrt{14}$, $\cos Y=2/\sqrt{14}$, $\cos Z=3/\sqrt{14}$; d) $|\mathbf{v}|=2{,}9$, $\cos X=4/29$, $\cos Y=$ $=25/29$, $\cos Z=10\sqrt{2}/29$. **23.** a) $\Delta y=\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$, donde $\alpha(\Delta x)=$
$=\begin{cases}\dfrac{e^{\Delta x}-1-\Delta x}{\Delta x} & \text{para } \Delta x\neq 0,\\ 0 & \text{para } \Delta x=0;\end{cases}$ b) $\Delta y=\alpha(\Delta x)\Delta x$, donde $\alpha(\Delta x)=$
$=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(\pi/2)+\Delta x-1}{\Delta x} & \text{para } \Delta x\neq 0,\\ 0 & \text{para } \Delta x=0,\end{cases}$ c) $\Delta y=\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$, donde $\alpha(\Delta x)=$
$=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{arctg}\Delta x-\Delta x}{\Delta x} & \text{para } \Delta x\neq 0,\\ 0 & \text{para } \Delta x=0.\end{cases}$ **24.** $\Delta y=\Delta x+2(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$, $dy=\Delta x$;
a) $\Delta y=0{,}010201$, $dy=0{,}01$; b) $\Delta y=0{,}121$, $dy=0{,}1$; c) $\Delta y=4$, $dy=1$; d) $\Delta y=$ $=48$, $dy=3$. **25.** $\Delta s=5\Delta t+2\Delta t^2$, $ds=5\Delta t$; a) $\Delta s=0{,}52$, $ds=0{,}5$; b) $\Delta s=1{,}08$, $ds=1$; c) $\Delta s=7$, $ds=5$. **26.** a) $\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}\ (x>0)$; b) $-\dfrac{dx}{x^2}\ (x\neq 0)$;
c) $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; d) $\dfrac{dx}{x^2-1}\ (x\neq\pm 1)$; e) $\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (-a<x<a)$;
f) $\dfrac{dx}{x^2+a^2}$; g) $(1+2x)e^{2x}\,dx$; h) $x\cos x\,dx$. **27.** a) $dy|_{x=0}=dx$, $dy|_{x=1}=dx$;
b) $dy|_{x=0}=dx$, $dy|_{x=1}=\dfrac{1}{2}dx$; c) $dy|_{x=0}=dx$, $dy|_{x=1}=e\,dx$; d) $dy|_{x=0}=$

$=\frac{\pi}{2}\,dx$, $dy|_{x=1}=0$; e) $dy|_{x=0}=0$, $dy|_{x=1}=-\frac{\pi}{2}\,dx$. **29.** Las igualdades b) y c). **30.** a) $-0{,}8747$; b) $0{,}5121$ rad., ó $29°20'$; c) $1{,}04$; d) $1{,}0033$; e) $0{,}83$ rad., ó $47°33'$; f) $1{,}2$. **31.** a) $2{,}08$; b) $3{,}9961$; c) $2{,}0045$. **32.** a) $(12x-8x^3)e^{-x^2}$; b) $-a^{10}\operatorname{sen} ax$; c) k^4e^{kx}; d) $12xf''(x^2)+8x^3f'''(x^2)$; e) $e^{x}f'(e^x)+e^{2x}f''(e^x)$; f) $\varphi'''(x)f'(\varphi(x))+3\varphi'(x)\varphi''(x)f''(\varphi(x))+\varphi'^3(x)f'''(\varphi(x))$; g) $-\frac{1\cdot 3\cdot 5\ \dots\ 17}{2^{10}x^9\sqrt{x}}$ $(x>0)$; h) $\frac{720}{(x-1)^7}$ $(x\neq 1)$; i) $2^{20}(x^2\operatorname{sen} 2x-20x\cos 2x-95\operatorname{sen} 2x)$; k) $5^{14}(5x^3-126x)\operatorname{sen} 5x-3\cdot 5^{13}(75x^2-182)\cos 5x$; l) $-\frac{2\cdot 8!}{(x+1)^9}$ $(x\neq -1)$; m) $\frac{1}{2}\cdot 30!\left[\frac{1}{(x-1)^{31}}+\frac{1}{(x+1)^{31}}\right]$ $(x\neq\pm 1)$; n) $5^{10}(5x+11)e^{5x}$; o) $-\frac{9!}{x^{10}}$ $(x>0)$. **33.** a) $\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!\left(\frac{a}{2}\right)^n}{(ax+b)^{\frac{2n-1}{2}}}$ $(ax+b>0)$; b) $\frac{(-1)^{n-1}(ad-bc)\,c^{n-1}\,n!}{(cx+d)^{n+1}}$ $(cx+d\neq 0)$; c) $-2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$; d) $2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$; e) $\frac{3}{4}\operatorname{sen}\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\operatorname{sen}\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)$; f) $\frac{3}{4}\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3^n}{4}\cos\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)$; g) $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\left[(\alpha-\beta)x+n\frac{\pi}{2}\right]-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^n\cos\left[(\alpha+\beta)x+n\frac{\pi}{2}\right]$; h) $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^n\cos\left[(\alpha-\beta)x+n\frac{\pi}{2}\right]+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^n\cos\left[(\alpha+\beta)x+n\frac{\pi}{2}\right]$; i) $a^{n-1}\left[ax\operatorname{sen}\left(ax+n\frac{\pi}{2}\right)+n\operatorname{sen}\left(ax+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right]$; k) $a^{n-2}\left[a^2x^2\cos\left(ax+n\frac{\pi}{2}\right)+2nax\cos\left(ax+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)+n(n-1)\cos\left(ax+(n-2)\frac{\pi}{2}\right)\right]$; l) $k^{n-2}e^{kx}[(ax^2+bx+c)k^2+(2ax+b)nk+n(n-1)a]$; m) $(-1)^{n-1}a^n(n-1)!\left[\frac{1}{(ax+b)^n}-\frac{1}{(ax-b^n)}\right]$ $\left(\frac{ax+b}{ax-b}>0\right)$; n) $x\operatorname{ch} x+n\operatorname{sh} x$, si n es impar; $x\operatorname{sh} x+n\operatorname{ch} x$, si n es par; o) $x^2\operatorname{sh} x+2nx\operatorname{ch} x+n(n-1)\operatorname{sh} x$, si n es impar; $x^2\operatorname{ch} x+2nx\operatorname{sh} x+n(n-1)\operatorname{ch} x$, si n es par; p) $a_0n!$ **34.** a) $f''(x)=2$; $f'''(x)=0$; b) $f''(x)=f'''(x)=0$; c) $f''(x)=-\frac{ab}{(a^2-x^2)^{3/2}}$; $f'''(x)=-\frac{3abx}{(a^2-x^2)^{5/2}}$; d) $f''(x)=-\frac{ab}{(x^2-a^2)^{3/2}}$; $f'''(x)=\frac{3abx}{(x^2-a^2)^{5/2}}$; e) $f''(x)=-\frac{1}{4a\operatorname{sen}^4(t/2)}$, $f'''(x)=\frac{\cos(t/2)}{4a^2\operatorname{sen}^7(t/2)}$, donde $t=\varphi^{-1}(x)$ es la función inversa a la función $x=a(t-\operatorname{sen} t)$ $(t\neq 2\pi n,\ n\in\mathbf{Z})$; f) $f''(x)=2$, $f'''(x)=0$. **35.** $(f^{-1}(y))'=\frac{1}{f'(x)}$, $(f^{-1}(y))''=-\frac{f''(x)}{f'^3(x)}$, $(f^{-1}(y))'''=\frac{3f''^2(x)-f'(x)f'''(x)}{f'^5(x)}$. **36.** a) $|\mathbf{r}''(2)|=2$, $\cos X=\cos Y=0$, $\cos Z=1$; b) $|\mathbf{r}''(\pi)|=1$, $\cos X=1$, $\cos Y=\cos Z=0$;

c) $|\mathbf{r}''(1)| = 2\sqrt{10}$, $\cos X = 0$, $\cos Y = 1/\sqrt{10}$, $\cos Z = 3/\sqrt{10}$; d) $|\mathbf{r}''|(2,5)| = \sqrt{641}/25$, $\cos X = -4/\sqrt{641}$, $\cos Y = 25/\sqrt{641}$, $\cos Z = 0$. **37.** a) $6\,dx^3$; b) $\frac{-15\,dx^4}{16(x-1)^{7/2}}$ $(x>1)$; c) $-\frac{6\,dx^5}{x^4}$ $(x>0)$; d) $(10\cos x - x \operatorname{sen} x)\,dx^{10}$. **38.** a) $\operatorname{ch} x\,dx^n$, si n es impar; $\operatorname{sh} x\,dx^n$, si n es par; b) $a^n \operatorname{sh}(ax)\,dx^n$, si n es impar; $a^n \operatorname{ch} ax\,dx^n$, si n es par; c) $(-1)^{n-1}2(n-3)!\,\frac{dx^n}{x^{n-2}}$ $(x>0,\ n\geqslant 3)$. **40.** $\varphi(x_0)\cdot n!$

Capítulo V

1. $27x - 9x^3 + 9x^5/5 - x^7/7$. **2.** $4(x^2+7)/(7\sqrt[4]{x})$. **3.** $\ln|x| - 1/(4x^4)$. **4.** $x + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. **5.** $-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x$. **6.** $x - \operatorname{th} x$. **7.** $\operatorname{arcsen} x + \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ **8.** $\frac{4^x}{\ln 4} + 2\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9}$. **9.** $(-\cos x + \operatorname{sen} x)\operatorname{sgn}(\cos x + \operatorname{sen} x)$. **10.** $(1/22)(2x-3)^{11}$. **11.** $-(2/5)\sqrt{2-5x}$. **12.** $(1/\sqrt{6})\operatorname{arctg}(x\sqrt{3/2})$. **13.** $(1/\sqrt{3})\ln|x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2-2}|$. **14.** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. **15.** $\operatorname{tg}(x/2)$. **16.** $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$. **17.** $(1/4)(1+x^3)^{4/3}$. **18.** $(1/4)\operatorname{arctg}(x^2/2)$. **19.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. ● Utilícese el hecho de que $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$. **20.** $-\operatorname{arcsen}(1/|x|)$. **21.** $2\operatorname{sgn} x \ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})$. $x(1+x)>0$. **22.** $-(1/2)e^{-x^2}$. **23.** $(1/3)\ln^3 x$. **24.** $(1/6)\operatorname{sen}^6 x$. **25.** $(3/2)\sqrt[3]{1-\operatorname{sen} 2x}$. **26.** $-(1/\sqrt{2}) \times \ln|\sqrt{2}\cos x + \sqrt{\cos 2x}|$. **27.** $\ln|\operatorname{tg}(x/2)|$. **28.** $\ln|\operatorname{th}(x/2)|$. **29.** $0{,}5(\operatorname{arctg} x)^2$. **30.** $\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}$. **31.** $-\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11}$. **32.** $-(1/15)(8+4x^2+3x^4)\times\sqrt{1-x^2}$. **33.** $\left(-\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\operatorname{sen}^2 x+\frac{2}{11}\operatorname{sen}^4 x\right)\sqrt{\operatorname{sen}^3 x}$. **34.** $-x-2e^{-x/2}+2\ln(1+e^{x/2})$. **35.** $x-2\ln(1+\sqrt{1+e^x})$. **36.** $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2$. **37.** $0{,}5[x\times\sqrt{a^2-x^2}+a^2\operatorname{arcsen}(x/2)]$. **38.** $-a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+a\operatorname{arcsen}(x/a)$. **39.** $0{,}5\times[x\sqrt{a^2+x^2}-a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})]$. **40.** $\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a})$, si $x>a$; $-\sqrt{x^2-a^2}+2a\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})$, si $x<-a$. **41.** $\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$. **42.** $\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|$. **43.** $x(\ln x-1)$. **44.** $\frac{2}{3}x^{3/2}\times\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)$. **45.** $-0{,}5(x^2+1)e^{-x^2}$. **46.** $\frac{1-2x^2}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\operatorname{sen} 2x$. **47.** $x\operatorname{arcsen} x+\sqrt{1-x^2}$. **48.** $-\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$. **49.** $\ln\operatorname{tg}(x/2)-\cos x\ln\operatorname{tg} x$. **50.** $0{,}5[(1+x^2)(\operatorname{arctg} x)^2-2x\operatorname{arctg} x+\ln(1+x^2)]$. **51.** $\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x$. **52.** $0{,}5(x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm a^2\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|)$. **53.** $0{,}5x[\operatorname{sen}(\ln x)+\cos(\ln x)]$. **54.** $\frac{a\operatorname{sen} bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$. **55.** $(1/8)e^{2x}(2-\operatorname{sen} 2x-\cos 2x)$. **56.** $\ln|x-2|+\ln|x+5|$. **57.** $x+(1/6)\ln|x|-(9/2)\times\ln|x-2|+(28/3)\ln|x-3|$. **58.** $-\frac{5x-6}{x^2-3x+2}+4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$. **59.** $\operatorname{arctg} x+$

$+\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}$. 60. $-\frac{1}{x-2}-\operatorname{arctg}(x-2)$. 61. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+$ $+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. 62. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$. 63. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\times$ $\times\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. 64. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$. 65. $\frac{2}{5}\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+\frac{1}{2}}+\frac{8}{5}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{2}{5}\operatorname{arctg}(2x+1)$.

66. $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x^3$. 67. $-\frac{1}{96(x-1)^{96}}-$ $-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}$. 68. $\frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}+$ $+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}$. 69. $\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}$. 70. $\frac{1}{7}\times$ $\times\ln\frac{|x|^7}{(1+x^7)^2}$. 71. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$. 72. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}$.

73. $\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3$. 74. $\frac{3}{4}\ln\frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[6]{x})^3}$ $-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}$. 75. $0{,}5\,(x^2-x\sqrt{x^2-1}+\ln|x+\sqrt{x^2-1}|)$.

76. $-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. 77. $\frac{2x-3}{4}\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{x^2+x+1}\right)$.

78. $-\ln\left|\frac{2-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$ 79. $R+\ln(x+1+R)-\sqrt{2}\times$ $\times\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2}R}{x}\right|$, donde $R=\sqrt{x^2+x+2}$. 80. $-\frac{19+5x+2x^2}{6}\times$ $\times\sqrt{1+2x-x^2}-4\operatorname{arcsen}\frac{1-x}{\sqrt{2}}$. 81. $\left(\frac{63}{256}x-\frac{21}{128}x^3+\frac{21}{160}x^5-\frac{9}{80}x^7+\right.$ $\left.+\frac{x^9}{10}\right)\sqrt{1+x^2}-\frac{63}{256}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. 82. $-\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\times$ $\times\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}$. 83. $\frac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{x^2-1}$. 84. $\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\times$ $\times\frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{(1-x)\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x+x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}$. 85. $\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\times$ $\times\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|$. 86. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}-$ $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|$. 87. $\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}$. 88. $\frac{3}{2(2z+1)}+$ $+\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}$, donde $z=x+\sqrt{x^2+x+1}$. 89. $\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|-2\operatorname{arctg}z$, donde $z=\frac{1+\sqrt{1-2x+x^2}}{x}$. 90. $\frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)}+\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2z}{\sqrt{5}-1-2z}\right|$,

donde $z=-x+\sqrt{x(1+x)}$. 91. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsen}\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}$. ● Hágase $t=x+\frac{1}{x}$. 92. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}}{x^3-1}\right|$. ● Hagase $t=x-\frac{1}{x}$. 93. $(5/16)\,x-(1/4)\operatorname{sen}2x+(3/64)\operatorname{sen}4x+(1/48)\operatorname{sen}^3 2x$. 94. $(1/16)\,x-(1/64)\operatorname{sen}4x+(1/48)\operatorname{sen}^3 2x$. 95. $1/(3\cos^3 x)-1/\cos x$. 96. $(1/4)\operatorname{tg}^4 x-(1/2)\operatorname{tg}^2 x-\ln|\cos x|$. 97. $-2\sqrt{\operatorname{ctg} x}+(2/3)\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}$. 98. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{2}}{z^2-1}$, donde $z=\operatorname{tg} x$. 99. $(1/4)\,x+(1/8)\operatorname{sen}2x+(1/16)\operatorname{sen}4x+(1/24)\operatorname{sen}6x$. 100. $-(3/16)\cos 2x+(3/64)\cos 4x+(1/48)\cos 6x-(3/128)\cos 8x+(1/192)\cos 12x$. 101. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}$. 102. a) $\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$; b) $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\operatorname{sen} x}{1+\varepsilon\cos x}$. 103. $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)$. 104. $-\frac{1}{6}\ln\frac{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}{1-\operatorname{sen} x\cos x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\times\left(\frac{2\cos x-\operatorname{sen} x}{\sqrt{3}\operatorname{sen} x}\right)$. 105. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x\right)$.

Capítulo VI

2. a) Sí; b) no; c) no; d) no; e) sí. 4. a) No; b) sí. 8. a) $\inf\limits_{(0,+\infty)} f(x)=0$ no se logra, $\sup\limits_{(0,+\infty)} f(x)=1=f(1)$; b) $\inf\limits_{[-5,10]} f(x)=0=f(0)$, $\sup\limits_{[-5,10]} f(x)=100=f(10)$; c) $\inf\limits_{(-\infty,+\infty)} f(x)=0$, $\sup\limits_{(-\infty,+\infty)} f(x)=\pi/2$ no se logran; d) $\inf\limits_{[0,\pi]} f(x)=-1=f(\pi)$, $\sup\limits_{[0,\pi]} f(x)=\sqrt{2}=f(\pi/4)$; e) $\inf\limits_{(0,1)} f(x)=0$, $\sup\limits_{(0,1)} f(x)=1/2$ no se logran. 13. a) 4; b) 2; c) $8/(3\pi)$; d) $2/\pi$. 17. a) $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/|k|$; b) $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/75$; c) $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$; d) $\delta(\varepsilon)=e^{-10}\varepsilon$. 18. a) Es uniformemente continua en $(1, 2)$, pero no lo es en $(0, 1)$; b) es uniformemente continua en $(0{,}01, 1)$, pero no lo es en $(0, 1)$; c) es uniformemente continua; d) es uniformemente continua; e) es uniformemente continua. 22. $f(x)=\operatorname{arcsen} x$ en $(-1, 1)$. 23. De la continuidad uniforme de $f(x)$ en (a, b) se deduce que en los puntos a y b está cumplida la condición de Cauchy sobre la existencia del límite de la función. Por eso la función $f(x)$ puede definirse adicionalmente en los puntos a y b de tal manera que resulte ser continua en $[a, b]$ y, por consiguiente, acotada en $[a, b]$. 27. Decrece en $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, crece en $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$; b) crece en $(-\infty, +\infty)$; crece en $(-1, 1)$, decrece en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$; d) crece en $(-\infty, +\infty)$; e) crece en $(2\pi n-2\pi/3, 2\pi n+2\pi/3)$, decrece en $(2\pi n+2\pi/3, 2\pi n+4\pi/3)$, $n\in\mathbf{Z}$; f) crece en $\left(\frac{1}{2n+1{,}5}, \frac{1}{2n+0{,}5}\right)$, $n\in\mathbf{Z}$, decrece en $(-\infty, -2)$, $\left(\frac{1}{2n+0{,}5}, \frac{1}{2n-0{,}5}\right)$, $n\in\mathbf{Z}$, $n\neq 0$ y $(2, +\infty)$; g) crece en $(0, 2/\ln 2)$, decrece en $(-\infty, 0)$ y $(2/\ln 2, +\infty)$; h) crece en $(0, n)$, decrece

en $(n, +\infty)$. **29.** Utilícese el método del ejemplo 3 § 3. **32.** $c=1/2$ ó $\sqrt{2}$. **34.** ● Empléese el método del ejemplo 5 § 3. **36.** ● Recúrrase al teorema 6 y al resultado del ejer. 23. **37.** No. **38.** Examinemos la función $g(x)=f(x)-$ $-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Ésta es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), además $g(a)=g(b)$ uesto que $f(x)$ no es lineal, entonces $g(x)\not\equiv 0$ y, por consiguiente, $g'(x)\not\equiv 0$ en (a, b). De aquí se deduce que $\exists c_1, c_2 \in (a, b)$ tales que $g'(c_1)>0$ y $g'(c_2)<0$ (explíquese, por qué), de donde $f'(c_1)>$ $>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, y $f'(c_2)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Por lo tanto en uno de los puntos c_i tenemos $|f'(c_i)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$, es decir, $|f(b)-f(a)|<|f'(c_i)|\times$ $\times|b-a|$. **40.** ● Utilícese el resultado del ejercicio 39. **41.** 0. **42.** 0. **43.** α/β. **44.** -2. **45.** 1. **46.** 1/2. **47.** $-1/3$. **48.** 1. **49.** 0. **50.** 1. **51.** 1/6. **52.** 0. **53.** $a^a(\ln a-1)$. **54.** $e^{2/\pi}$. **55.** 1/e. **56.** 1. **57.** $e^{-1/6}$. **58.** $e^{-1/3}$. **59.** 1/2. **60.** 1/2. **61.** 0. **62.** $-e/2$. **63.** a^a. **64.** 1. **65.** a) $1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+$ $+o(x^n)$; b) $1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5)$; c) $x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$; d) $1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)$; e) $-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+o(x^6)$; f) $x-\frac{x^7}{18}-\frac{x^{13}}{3240}+$ $+o(x^{13})$; g) $a+\frac{x}{na^{n-1}}-\frac{(n-1)x^2}{2n^2a^{2n-1}}+o(x^2)$; h) $1-\frac{1}{2}x+\frac{7}{8}x^2+\frac{7}{16}x^3+$ $+o(x^3)$. **66.** a) $1+2(x-1)+(x-1)^2$; b) $1+(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3+$ $+o((x-1)^3)$; c) $1-\frac{\pi^2}{8}(x-1)^2+\frac{\pi^4}{384}(x-1)^4+o((x-1)^4)$. **67.** a) Menor que 1/3840; b) menor que $2\cdot10^{-6}$; c) menor que 1/16. **68.** a) 2,080; b) 3,08000; c) 0,3090; d) 0,01745241; e) 0,095; f) 1,22140; g) 0,99452. **69.** a) $-1/12$; b) -2; c) 1; d) $-1/4$; e) 1/2; f) 0; g) 1/3; h) 19/90.

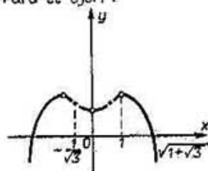
Capítulo VII

En las gráficas de las funciones (págs. 217—222) los puntos extremos se designan con «círculos» (○) y los puntos de inflexión, con «cruces» (× o +).

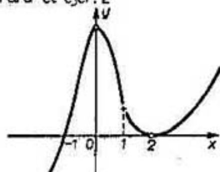
Capítulo VIII

1. a) $s=\sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(2+\frac{i-1}{n}\right)^3\frac{1}{n}$; $S=\sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(2+\right.$ $\left.+\frac{i}{n}\right)^3\frac{1}{n}$; b) $s=\sum_{i=1}^{n} 2^{(i-1)/n}\frac{10}{n}$; $S=\sum_{i=1}^{n} 2^{i/n}\frac{10}{n}$. **2.** a) 3; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{3^{m+1}-2^{m+1}}{m+1}$. **4.** ● Empléese el hecho de que el punto $x=0$ es el límite de los puntos de discontinuidad. **6.** a) Sí; b) no; c) no; d) sí, teniendo en cuenta la observación aducida en el p. 4 del § 1; e) sí; f) no. **7.** No; sí; no; sí. **9.** a) Sí; b) no. **10.** a) $2/\pi$; 0; 0; $(2/\pi)\cos\varphi_0$; b) -1; $-1/3$; 1/2; 0; 1. **11.** 2/3; $(1/15)\,10^{3/2}$; $(1/150)\,100^{3/2}$; b) 10; c) $(1/2)\cos\varphi$. **12.** $v_{med}=(v_0+v_1)/2$, donde $v_1=2gh$ es la velocidad final del cuerpo. **13.** $t_0^2/2$; $t_0^2/2$; $t_0^2/2-(t_0^2/2)(1/t_0)\times$

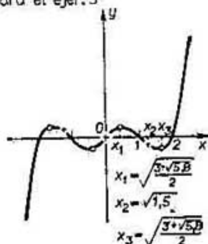
Para el ejer. 1



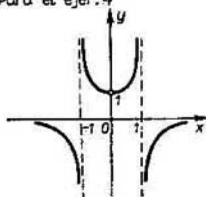
Para el ejer. 2



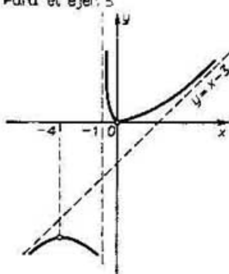
Para el ejer. 3



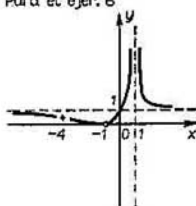
Para el ejer. 4



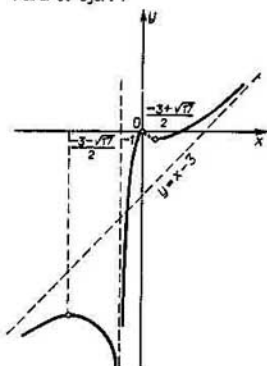
Para el ejer. 5



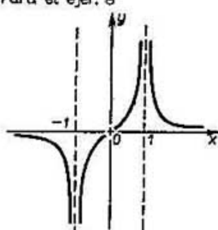
Para el ejer. 6



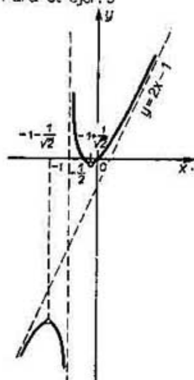
Para el ejer. 7



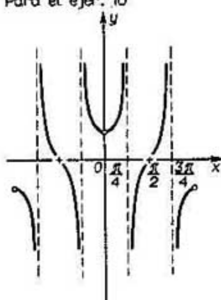
Para el ejer. 8



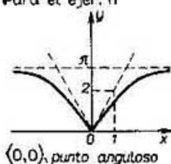
Para el ejer. 9



Para el ejer. 10

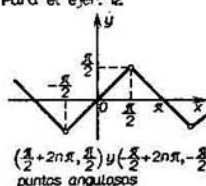


Para el ejer. 11



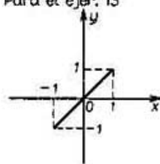
(0,0), punto anguloso

Para el ejer. 12

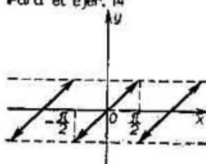


$\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, puntos angulosos

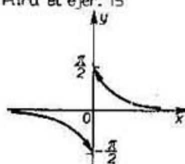
Para el ejer. 13



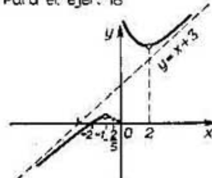
Para el ejer. 14



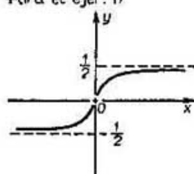
Para el ejer. 15



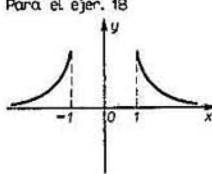
Para el ejer. 16



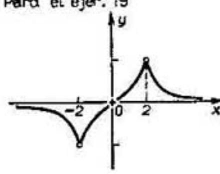
Para el ejer. 17



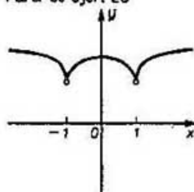
Para el ejer. 18



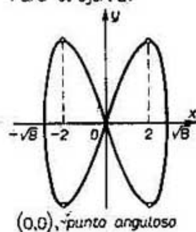
Para el ejer. 19



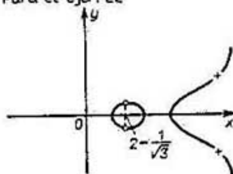
Para el ejer. 20



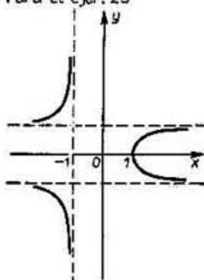
Para el ejer. 21



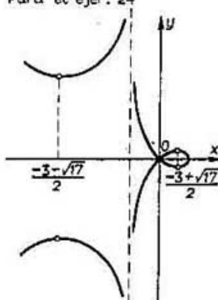
Para el ejer. 22



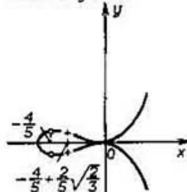
Para el ejer. 23



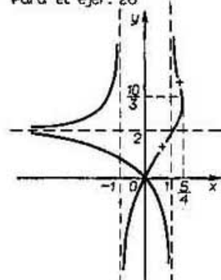
Para el ejer. 24



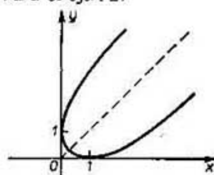
Para el ejer. 25



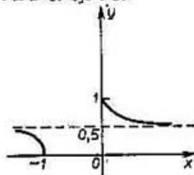
Para el ejer. 26

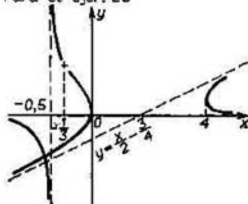


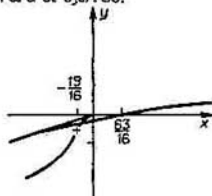
Para el ejer. 27

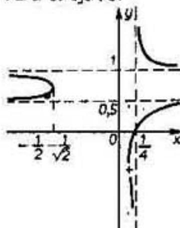


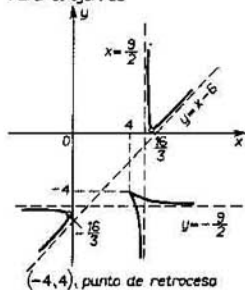
Para el ejer. 28

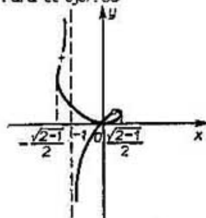


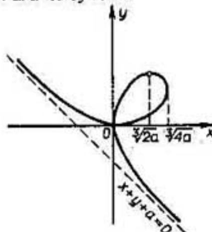

Para el ejer. 29
y
-0,5
$-\frac{1}{3}$
0
$\frac{3}{4}$
4
x
$y=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}$

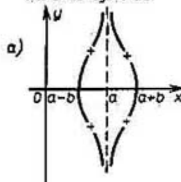

Para el ejer. 30.
y
$-\frac{19}{16}$
$\frac{63}{16}$
x

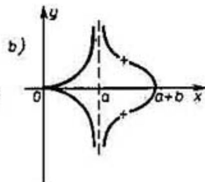

Para el ejer. 31
y
1
0,5
0
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{1}{4}$
x

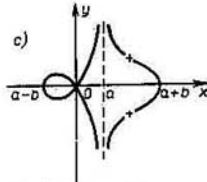

Para el ejer. 32
y
$x=\frac{9}{2}$
$y=x-6$
4
0
$\frac{16}{3}$
x
-4
$-\frac{16}{3}$
$y=-\frac{9}{2}$
(-4,4), punto de retroceso


Para el ejer. 33
y
$-\frac{\sqrt{2}-1}{2}$
-1
0
$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$
x

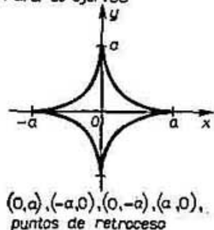

Para el ejer. 34
y
0
$\sqrt[3]{2}a$
$\sqrt[3]{4}a$
x
$x+y+a=0$


Para el ejer. 35
a)
y
0
a−b
a
a+b
x
(0,0), punto aislado

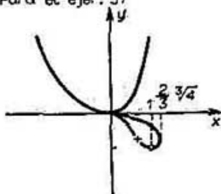

b)
y
0
a
a+b
x
(0,0), punto de retroceso


c)
y
a−b
0
a
a+b
x
(0,0), punto múltiple

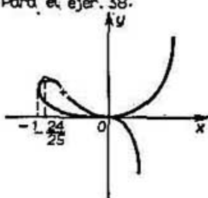
Para el ejer. 36



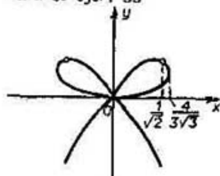
Para el ejer. 37



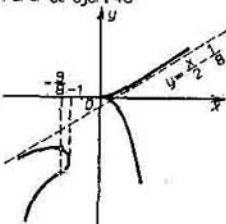
Para el ejer. 38



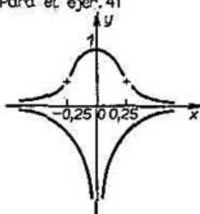
Para el ejer. 39



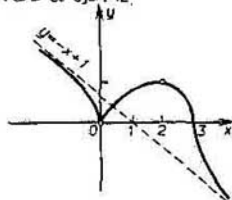
Para el ejer. 40



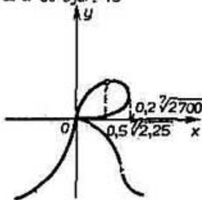
Para el ejer. 41



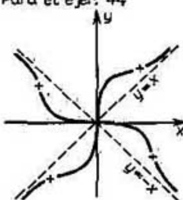
Para el ejer. 42



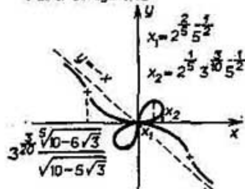
Para el ejer. 43



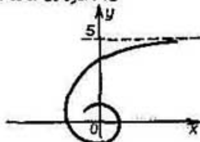
Para el ejer. 44



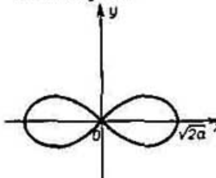
Para el ejer. 45

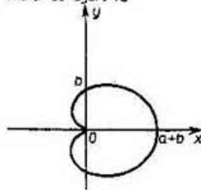


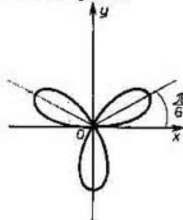
Para el ejér. 46

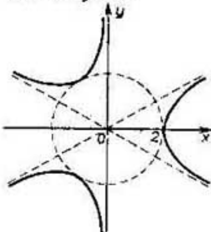


Para el ejer. 47







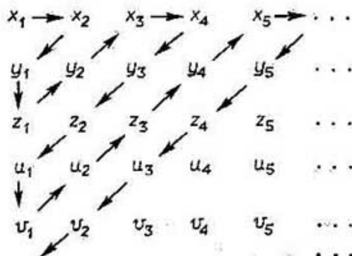


$\times (T/4\pi)\,[\operatorname{sen}(4\pi t_0/T+2\varphi)-\operatorname{sen} 2\varphi]$, $i_0^2/2$. **14.** a) 0; b) $\operatorname{sen}(b^2)$; c) $-\operatorname{sen}(a^2)$; d) $2x\sqrt{1+x^4}$; e) $2x\sqrt{1+x^4}$; f) $3x^2/\sqrt{1+x^6}-2x/\sqrt{1+x^4}$; g) $3x^2/\sqrt{1+x^6}-$ $-2x/\sqrt{1+x^4}$; h) $3x^2/\sqrt{1+x^6}$; i) $3t^2/\sqrt{1+t^{12}}$; k) 0; l) $-\int_{t^2}^{x^3} x(x^2+$ $+t^4)^{-3/2}\,dx+3x^2/\sqrt{x^6+x^{12}}$. **15.** a) 1; b) 1; c) $\pi(2\operatorname{sen}\alpha)$. **16.** a) $\pi\sqrt{2}$; b) 2/3. **17.** 5/6. **18.** a) $0{,}5\ln(e/2)$; b) 4π; c) 1. **19.** a) 1/6; b) $(1/\sqrt{2})\times$ $\times\ln[(9+4\sqrt{2})/7]$; c) $2-\pi/2$; d) $\pi^2/4$. **20.** No. **21.** a) Sí, $\pi/4$; b) sí, $\pi/4$; c) no, en este intervalo está alterada la condición del teorema 4: $0\leqslant \operatorname{sen} t\leqslant 1$. **24.** a) $0{,}5\ln 3-\pi/2\sqrt{3}$; b) $(5/27)e^3-2/27$; c) $4\pi/3-\sqrt{3}$; d) $2\pi(1/\sqrt{3}-$ $-1/2\sqrt{2})$; e) 1/6; f) $\pi^3/6-\pi/4$. **27.** a) $\dfrac{\pi(2m)!\,(2n)!}{2^{2m+2n+1}m!\,n!\,(m+n)!}$; b) 0, si n es un número par; π, si n es un número impar; c) $\pi/2^n$; d) $(\pi/2^n)\operatorname{sen}(\pi n/2)$. **28.** a) $(8/27)(10\sqrt{10}-1)$; b) $(e^2+1)/4$; c) $\ln\operatorname{tg}(\pi/4+a/2)$; d) $4a[1+\sqrt{3}\times$ $\times\ln(1+\sqrt{3})/\sqrt{2}]$; e) $6a$; f) $1+[\ln(1+\sqrt{2})]/\sqrt{2}$; g) $32a$; h) $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+$ $+(a/2)\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$; i) $8a$; k) $3\pi a/2$; l) 19/3. **30.** a) $(ab/2)[\operatorname{arcsen}(x_1/a)$ $-\operatorname{arcsen}(x_0/a)]-[b/(2a)](x_1\sqrt{a^2-x_1^2}-x_0\sqrt{a^2-x_0^2})$; b) 9/2; c) $1/3+$ $+2/\pi$; d) $4a^3/3$; e) $0{,}5\operatorname{cth}(\pi/2)$. **31.** a) $(a^3/3)(4\pi^3+3\pi)$; b) $6\pi a^2$. **32.** a) $3\pi a^2/2$; b) $\pi a^2/4$; c) 11π; d) 2/3. **33.** a) $3a^2/2$; b) a^2. **34.** $(\pi h/6)[(2A+a)B+$ $+(A+2a)b]$. **36.** a) $2abc/3$; b) $4\pi abc/3$; c) $8\pi abc/3$; d) $16a^3/3$; e) $2\pi a^3/3-$ $-8a^3/9$. **37.** a) $3\pi ab^2/7$; b) $16\pi/15$; c) $8\pi/3$; d) $\pi^2/2$; e) $2\pi^2$; f) $5\pi^2a^3$; g) $6\pi^3a^3$. **38.** $2a^2$; $\pi a^3/2$. **39.** $(p^2/8)[\sqrt{2}+5\ln(1+\sqrt{2})]$. **40.** $bh^2/6$; $bh^3/12$. **41.** $M_x=$ $=\pi ab^3/4$; $M_y=\pi a^3b/4$. **42.** $3RM/16$. **45.** $4\pi^2$. **46.** $x_0=(a\operatorname{sen}\alpha)/\alpha$; $y_0=0$. **47.** $x_0=9a/20$; $y_0=9a/20$. **48.** $x_0=0$; $y_0=0$; $z_0=3a/8$. **49.** $\varphi_0=0$; $r_0=$ $=5a/6$.

Capítulo IX

1. a) Es suficiente a cada número n del primer conjunto poner en correspondencia el número $2n$ del segundo conjunto; b) la función $y=(b-a)\,x+a$ realiza la correspondencia biunívoca entre los elementos de los segmentos [0, 1] y $[a, b]$; c) la función $y=\operatorname{tg}\pi\dfrac{(2x-a-b)}{2(b-a)}$ realiza la correspondencia biunívoca entre los elementos del intervalo (a, b) y la recta numérica **R**. **2.** b) Los elementos de unión de la cantidad numerable de los conjuntos numerables $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, $\{z_i\}$, $\{u_i\}$, $\{v_i\}$, . . ., $\{w_i\}$, . . . se puede numerar según el esquema

siguiente:



4. ● a) Empléese el método del ejemplo 2 del § 1; b) utilícese la igualdad $A = (A \setminus B) + AB$ (véase el ejer. 5) y el resultado del ejer. 4 a); c) recúrrase al resultado del ejer. 4 b); d) hágase uso del resultado del ejer. 4 b). **5.** a) Demostremos que: 1º) todo elemento x del conjunto $(A + B)\,C$ pertenece también al conjunto $(AC + BC)$; 2º) a la inversa: todo elemento x del conjunto $(AC + BC)$ pertenece también al conjunto $(A + B)\,C$. 1º. Si $x \in (A + B)\,C$, quiere decir que $x \in (A + B)$ y $x \in C$. Ya que $x \in (A + B)$, tendremos que x pertenece por lo menos a uno de los conjuntos A o B. Sea, por ejemplo, $x \in A$. Entonces $x \in AC$ y, por consiguiente, $x \in (AC + BC)$. 2º. Si $x \in (AC + BC)$, resulta que x pertenece por lo menos a uno de los conjuntos AC o BC. Sea, por ejemplo $x \in AC$. Entonces $x \in A$ y $x \in C$. De esta manera $x \in (A + B)$ y $x \in (A + B)\,C$. **6.** Demostremos que todo elemento x del conjunto $\overline{\bigcup_k A_k}$ pertenece también al conjunto $\bigcap_k \overline{A}_k$. Si $x \in \overline{\bigcup_k A_k}$, tendremos que $x \notin \bigcup_k A_k$ y, por consiguiente, $x \notin A_k \forall k$. Por eso $x \in \overline{A}_k \forall k$, lo que significa $x \in \bigcap_k \overline{A}_k$. Queda por demostrar que cualquier elemento x del conjunto $\bigcap_k \overline{A}_k$ pertenece también al conjunto $\overline{\bigcup_k A_k}$. Hágalo por su propia cuenta. **7.** Si suponemos que cierto punto $x \in G$ no es un punto interior de G, entonces x resultará ser un punto límite de E (explíquese por qué) y, por consiguiente, $x \in E$. Pero eso resulta imposible, puesto que $GE = \varnothing$. Así, pues, todo punto $x \in G$ es un punto interior de G, es decir, G es un conjunto abierto. **8.** ● Utilícese el hecho de que $Q + \overline{Q} = [a, b]$ y $\mu Q = 0$ (véase el ejemplo 4 del § 1); de aquí $\mu\overline{Q} = b - a$. **9 y 10.** ● Hágase uso de la definición de conjunto medible. **12.** ● a) Empléese el método aplicado en el ejemplo 1 del § 2; b) utilícese el resultado c) del ejemplo 5 del § 1; c) aprovéchese el resultado e) del ejemplo 5 del § 1. **13.** ● Examínese la función $y(x) = x$ en el segmento $[0, 1]$ y empléense las propiedades 5ª y 1ª de las funciones medibles. **15.** La integrabilidad según Lebesgue se deduce de la mensurabilidad de $f(x)$ (véase el ejer. 12 a). Para demostrar que $f(x)$ no es integrable según Riemann en $[0, 1]$, es suficiente demostrar que las integrales inferior y superior de Darboux no son iguales: $\underline{I} \neq \overline{I}$. Examínese la partición arbitraria de $[0, 1]$ en segmentos parciales y demuéstrese que para aquélla $s = 0$, $S \geqslant 1 - a$ (s y S son las sumas de Darboux). De aquí se infiere que $\underline{I} = 0$, $\overline{I} \geqslant 1 - a > 0$. **16.** $\int\limits_{[0,1]} f(x)\, d\mu(x) = 1 - a$. **17.** $\int\limits_{D} \varphi(x)\, d\mu(x) = (1 - a)/2$. **19.** ● Anótese la diferencia $f(x) - g(x)$, aprovechando para este fin el resultado del ejer.

18. 20. ● Utilícese el hecho de que el conjunto de todas las sumas inferiores (superiores) integrales de Darboux que se obtienen al dividir $[a, b]$ en un número finito de segmentos parciales, forma parte del conjunto de todas las sumas inferiores (superiores) integrales que se obtienen al dividir $[a, b]$ en un número finito de conjuntos medibles disjuntos dos a dos. **21.** ● Hágase uso de que para la partición de Lebesgue T del conjunto E se cumple la desigualdad $S_T - s_T \leqslant \delta \cdot \mu E$, donde $\delta = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (y_k - y_{k-1})$, así como de que $\overline{I} - \underline{I} \leqslant S_T - s_T$. **22.** ● Para demostrar la necesidad utilícese el hecho de que para la partición de Lebesgue T del conjunto E se cumple la desigualdad $S_T - s_T \leqslant \delta \cdot \mu E$, donde $\delta = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (y_k, y_{k-1})$. Para demostrar la suficiencia recúrrase a la desigualdad $\overline{I} - \underline{I} \leqslant S_T - s_T$. **23.** ● Empléese el hecho de que cualquier suma integral de Lebesgue $I(E_k, \xi_k)$ de la partición de Lebesgue $T = \{E_k\}$ del conjunto E satisface las desigualdades $s_T \leqslant I(E_k, \xi_k) \leqslant S_T$, así como de que $S_T - s_T \leqslant \delta \cdot \mu E$.

УДК 517=60

Учебное издание

Валентин Федорович Бутузов
Наталия Чары Крутицкая
Герман Николаевич Медведев
Александр Александрович Шишкин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
В ВОПРОСАХ И ЗАДАЧАХ

Заведующий редакцией Ф. Г. Петров. Научный редактор В. Верналь. Редактор Л. М. Бушева. Художник А. В. Лисицын. Художественные редакторы Н. В. Дубова, Е. Д. Дроздов. Технический редактор Е. В. Алехина. Корректор Л. А. Тер-Ованесова

ИБ № 7600

Сдано в набор 04.04.88. Подписано к печати 27.09.88. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная Гарнитура обыкновенная. Объем 7 бум. л. Усл. печ. л. 14. Усл. кр.-отт. 14,62. Уч.-изд. л. 15,16. Изд. № 13/6018. Тираж 8000 экз. Зак. 0151. Цена 1 р. 60 к.

Издательство «Мир» В/О «Совэкспорткнига» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2.

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7 «Искра революции» В/О «Совэкспорткнига» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 103001, Москва, Трехпрудный пер., 9.

$\text{М} \dfrac{1602070000-057}{056(01)-89}$ 150—89, ч. 2.